Артур Шарафиев

ЕГЭ Математика

ШПОРА 2024

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

1) $a^0 = 1$

2) $a^1 = a$

3) $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$

4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

7) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

8) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

9) $(a : b)^n = a^n : b^n$

ДИСКРИМИНАНТ

$ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминантом квадратного уравнения D называется выражение b^2-4ac.

При решении уравнения с помощью дискриминанта возможны три случая:

1. D > 0. Тогда корни уравнения вычисляются по формуле: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2. D = 0. В этом случае единственный корень вычисляется по формуле: $x = \frac{-b}{2a}$

3. D < 0. В этом случае уравнение не имеет корней.

$3x^2 - 11 = -8x$

$3x^2 + 8x - 11 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 196$

$x = \frac{-8 + \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 + 14}{6} = 1$

$x = \frac{-8 - \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 - 14}{6} = -11/3$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

1) $a^{\log_a b} = b$

2) $\log_{10} b = \lg(b)$

3) $\log_e b = \ln(b)$

4) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

5) $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$

6) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$

7) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

8) $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$

9) $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$

10) $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$

11) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

12) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 13) $\log_a 1 = 0$

ТЕОРЕМА ВИЕТА

Сумма корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-b/a$, а произведение равно c/a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Формулы Сокращеннного Умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ - разность квадратов

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - квадрат суммы

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ - квадрат разности

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$ - куб суммы

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$ - куб разности

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ - сумма кубов

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ - разность кубов

РАВНОСИЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

f(x), g(x) - функции с переменной x.

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$

$\sqrt{f(x)} = a \iff f(x) = a^2$

Решение уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Область допустимых значений

ОДЗ

Дробь

$\frac{1}{f(x)}$

$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} = 0$

$\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases}$

Квадратный корень

$\sqrt{f(x)}$

$\sqrt{x-2} - 1 = 0$

$x - 2 \geqslant 0$

Логарифм

$\log_{g(x)} f(x)$

$\log_{g(x)} f(x) + 5 - x^2 = 0$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Дробно-рациональные уравнения

При решении уравнения с двумя дробями можно использовать свойство пропорции.

Свойство пропорции: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $a \cdot d = b \cdot c$, где b ≠ 0, d ≠ 0.

Решение уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

f(x), g(x) - функции с переменной x

Тонкие моменты в формулах логарифмов

$$\log_a f^2 = 2\log_a |f|$$

$$\log_{a^2} f = \frac{1}{2}\log_{|a|} f$$

$$\log_a(fg) = \log_a |f| + \log_a |g|$$

$$\log_a \frac{f}{g} = \log_a |f| - \log_a |g|$$

Модуль

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

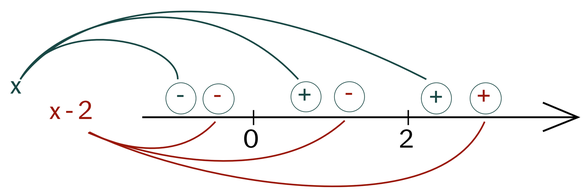
$$|f| = x \longrightarrow \begin{cases} x >= 0, \\ \left[\begin{array}{l} f = x; \\ f = -x. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$|f| = |g| \longrightarrow f^2 = g^2 \text{ или } \left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right.$$

Несколько модулей

Когда появляется несколько модулей, приходится рассматривать несколько случаев раскрытия каждого на промежутках по алгоритму:
1) Находим нули подмодульных выражений.
2) Отмечаем точки на координатной прямой и определяем знаки на участках.
Там, где подмодульное выражение отрицательное, поставим “-”.
Там, где подмодульное выражение положительное, поставим “+”.
3) Решаем уравнение относительно условий раскрытия модулей на каждом из участков.
4) Собираем корни и пишем ответ.

|x| + |x - 2| = 2.



x < 0	0 <= x <= 2	x > 2
-x -(x - 2) = 2	x - (x - 2) = 2	x + (x - 2) = 2
-2x + 2 = 2	2 = 2	2x - 2 = 2
x = 0	x - любое число. Но под наши ограничения попадают только x є [0; 2]	2x = 4
Не подходит, так как раскрывали при условии x < 0		x = 2
		Не подходит, так как раскрывали при условии x > 2

БЛОК ТРИГОНОМЕТРИИ

Формулы суммы и разности

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$
$$2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$
$$2\sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

Схема Горнера

С помощью схемы Горнера мы тоже можем разложить уравнения третьей и четвертой степени.
Приведем алгоритм решения уравнения $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ по данному методу:
1) Находим делители свободного члена и находим корень методом подбора s.
2) Заполняем таблицу, в верхнюю строку, начиная со второго столбца, выписываем коэффициенты при $x^n, x^{n-1} ... x$ по порядку от старшего к меньшему $a_n, a_{n-1}, ... a_0$.
3) Во вторую строку первого столбца пишем корень, найденный подбором s.
4) Сносим во вторую строку второго столбца старший коэффициент $a_n = b_n$.
5) Далее в третий столбец второй строки записываем значение $a_{n-1} + b_n \cdot s = b_{n-1}$.
6) В четвертый столбец второй строки записываем значение $a_{n-2} + b_{n-1} \cdot s = b_{n-2}$.
7) Все столбцы второй строки заполняем по аналогии.
8) Полученные числа $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, b_1$ являются коэффициентами частного от деления многочлена на двучлен x - s, а b_0 - остатком.
То есть, $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = (x - s)(b_n \cdot x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... b_1) + b_0$.

частное остаток

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
s	$a_n = b_n$	$a_{n-1} + b_n \cdot s = b_{n-1}$	$a_{n-2} + b_{n-1} \cdot s = b_{n-2}$	...	$a_0 + b_1 \cdot s = b_0$

Теорема Безу

$x^3 - 3x - 2 = 0$

Делители числа -2: -2; 2; -1; 1.

$(-1)^3 - 3(-1) - 2 = 0$

x = -1 - корень уравнения

$x^3 - 3x - 2 = 0$ | x + 1

$-x^3 + x^2$ | $x^2 - x - 2$

$-x^2 - 3x$

$-x^2 - x$

$-2x - 2$

$-2x - 2$

0

x^2, $-x$, -2

$\longrightarrow x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

Ответ: -1; 2.

Основные правила дифференцирования

1. Коэффициент перед функцией можно вынести за "знак" производной

$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$

2. Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

3. Производная произведения

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

4. Производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

5. Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1) $c' = 0$, c = const
2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x>0$
3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a>0$, $a \neq 1$
4) $(e^x)' = e^x$
5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $x>0$, $a>0$, $a \neq 1$.
6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x>0$
7) $(\sin x)' = \cos x$
8) $(\cos x)' = -\sin x$
9) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$
10) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$
11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$

Таблица первообразных

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = x^m$, $m \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$
		$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$

Где C - произвольное число

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Основные тождества и уравнения

$\sin x=a$

$x_1=\arcsin(a)+2\pi k,\ k\in z$

$x_2=\pi-\arcsin(a)+2\pi k,\ k\in z$

$\cos x=b$

$x_1=\arccos(b)+2\pi k,\ k\in z$

$x_2=-\arccos(b)+2\pi k,\ k\in z$

$tgx=c$

$x=arctg(c)+\pi k,\ k\in z$

$ctgx=d$

$x=arcctg(d)+\pi k,\ k\in z$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha+1$

$\frac{1}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha+1$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$tg2\alpha=\frac{2\cdot tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2\cdot ctg\alpha}$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

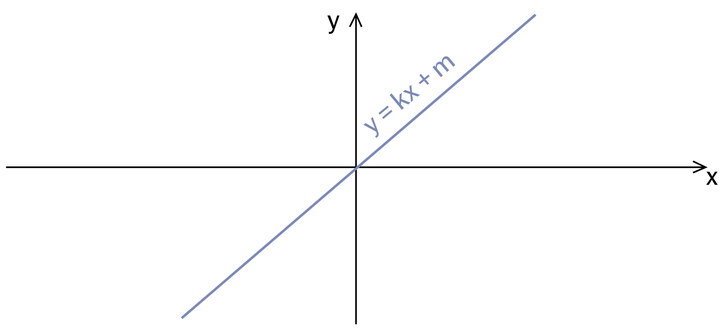
Метод рационализации

Логарифмическое выражение	Рациональное выражение
$\log_a f-\log_a g\ \vee 0$	$(a-1)(f-g)\vee 0$
$\log_a f-1\ \vee 0$	$(a-1)(f-a)\vee 0$
$\log_a f\ \vee 0$	$(a-1)(f-1)\vee 0$
$\log_h f-\log_h g\ \vee 0$	$(h-1)(f-g)\vee 0$
$\log_h f-1\ \vee 0$	$(h-1)(f-h)\vee 0$
$\log_h f\ \vee 0$	$(h-1)(f-1)\vee 0$
$\log_f h-\log_g h\ \vee 0$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)\vee 0$
$\log_h f\cdot\log_p k\ \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(k-1)\vee 0$
$\frac{\log_a f-\log_a g}{\log_b h}\ \vee 0$	$\frac{(a-1)(f-g)}{(b-1)(h-1)}\vee 0$

$|A|\vee|B| \quad\longleftrightarrow\quad A^2\vee B^2 \quad\longleftrightarrow\quad A^2-B^2\vee 0 \quad\longleftrightarrow\quad (A-B)(A+B)\ \ 0$

Линейная функция

Линейная функция — это функция, которую можно задать формулой $y=kx+m$, где x — независимая переменная, k и m — некоторые числа. Графиком линейной функции $y=kx+m$ является прямая. m отвечает за смещение функции вдоль оси Oy.



Иррациональные уравнения

1) Уравнение вида: $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Решением данного уравнения будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} g(x)>=0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$$

2) Уравнение вида: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

Решением данного уравнения будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} g(x)>=0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} f(x)>=0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

Выбираем то, что легче решить.

3) Уравнение вида: $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0$

Решением данного уравнения будет решение равносильной системы:

$$\begin{cases} g(x)>=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} f(x)>=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$$

Формулы приведения

$\sin(\frac{\pi}{2}-a)=\cos a$

$\cos(\frac{\pi}{2}-a)=\sin a$

$\sin(\frac{\pi}{2}+a)=\cos a$

$\cos(\frac{\pi}{2}+a)=-\sin a$

$\sin(\pi+a)=-\sin a$

$tg(\frac{\pi}{2}-a)=ctg a$

$ctg(\frac{\pi}{2}-a)=tg a$

$tg(\frac{\pi}{2}+a)=-ctg a$

$ctg(\frac{\pi}{2}+a)=-tg a$

$tg(\pi+a)=tg a$

$\cos(2\pi-a)=\cos a$

$\sin(\frac{3\pi}{2}-a)=-\cos a$

$\cos(\frac{3\pi}{2}-a)=-\sin a$

$\sin(\pi-a)=\sin a$

$\cos(\pi-a)=-\cos a$

$\cos(\pi+a)=-\cos a$

$tg(2\pi-a)=-tg a$

$tg(\frac{3\pi}{2}-a)=ctg a$

$ctg(\frac{3\pi}{2}-a)=tg a$

$tg(\pi-a)=-tg a$

$ctg(\pi-a)=-ctg a$

$ctg(\pi+a)=ctg a$

$\sin(2\pi-a)=-\sin a$

$\sin(\frac{3\pi}{2}+a)=-\cos a$

$\cos(\frac{3\pi}{2}+a)=\sin a$

$\sin(2\pi+a)=\sin a$

$\cos(2\pi+a)=\cos a$

$ctg(2\pi-a)=-ctg a$

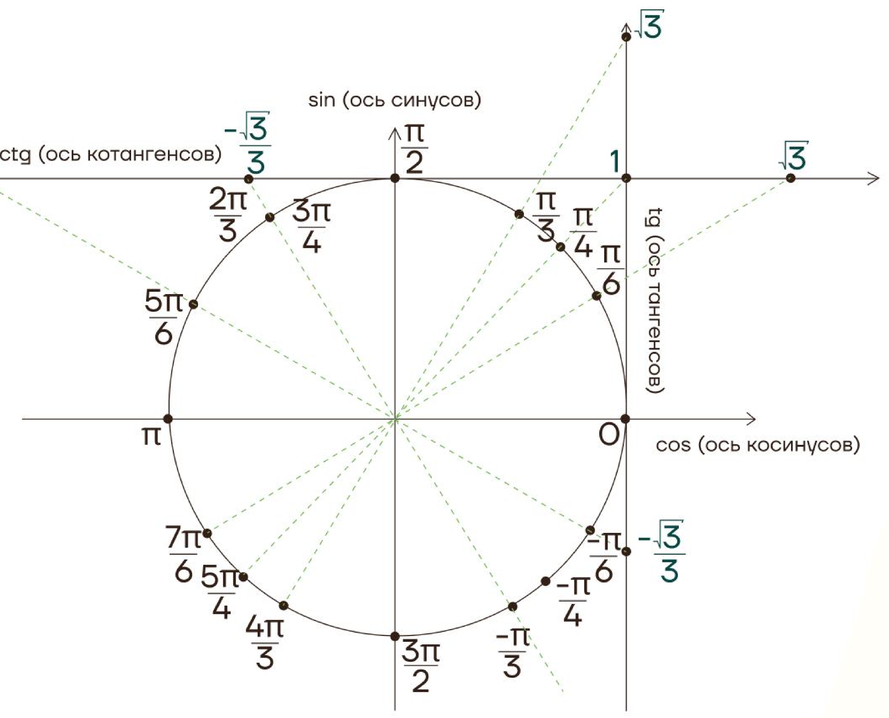
$tg(\frac{3\pi}{2}+a)=-ctg a$

$ctg(\frac{3\pi}{2}+a)=-tg a$

$tg(2\pi+a)=tg a$

$ctg(2\pi+a)=ctg a$

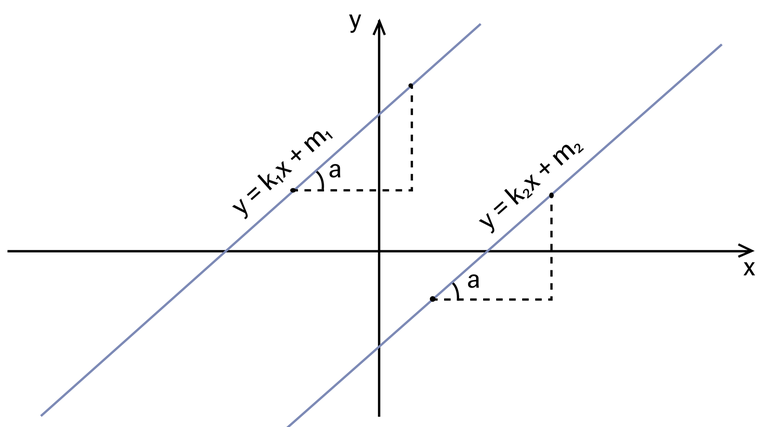
Оси тангенсов и котангенсов на окружности



Параллельные прямые

Параллельные прямые имеют одинаковые коэффициенты наклона k и разные коэффициенты m, которые отвечает за перемещение по оси Oy:

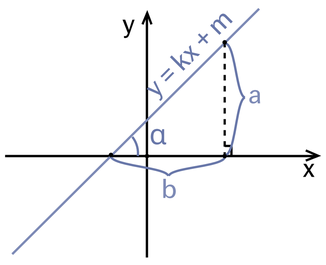
$k_1=k_2 \qquad m_1\neq m_2$



Коэффициент наклона прямой

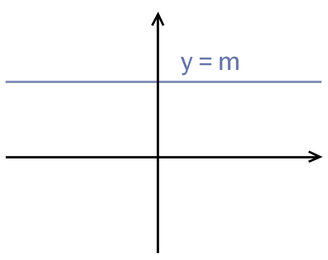
Положительный

$k > 0$



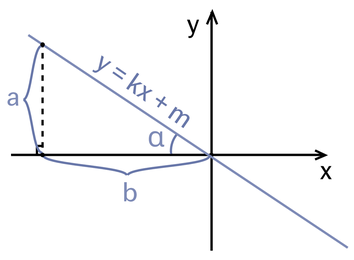
Равен 0

$k = 0$



Отрицательный

$k < 0$



Коэффициент k равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси Ox.

$y = kx + m$

$k = tg(\alpha)$

$y = \frac{a}{b}x + m$

$y = kx + m$

$k = tg(\alpha) = 0$

$y = m$

$y = kx + m$

$k = tg(\alpha)$

$y = -\frac{a}{b}x + m$

Парабола

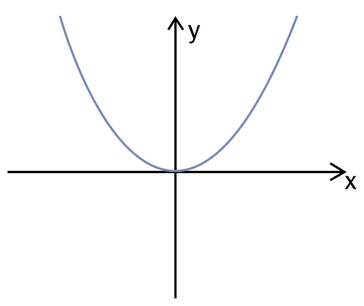
Вспомним 7 класс. Мы рисовали параболу с помощью таблицы и после этого по найденным точкам строили график. Парабола имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$.

Знак коэффициента a в функции $y = ax^2 + bx + c$ отвечает за направление ветвей.
При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

Коэффициент a

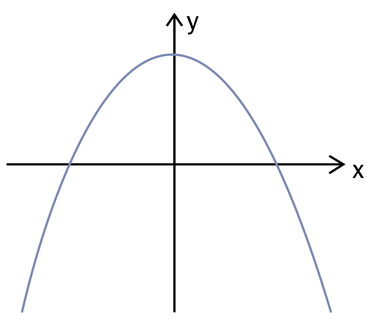
Положительный

$a > 0$



Отрицательный

$a < 0$



Корни квадратного уравнения

Для того чтобы найти то, в каких точках парабола пересекается с осью 0x (найти корни), мы должны приравнять к нулю функцию $y = ax^2 + bx + c$.

Нужно найти, в каких точках парабола пересекает ось 0x?

$y = ax^2 + bx + c$

→ Приравниваем функцию $ax^2 + bx + c$ к нулю

$ax^2 + bx + c = 0$

→ Находим корни данного уравнения

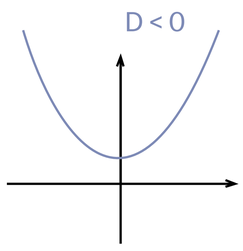
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Дискриминант и количество корней

Для того чтобы найти количество корней квадратного уравнения, необходимо найти дискриминант квадратного уравнения. Мы можем управлять количеством корней квадратного уравнения, содержащего параметр.

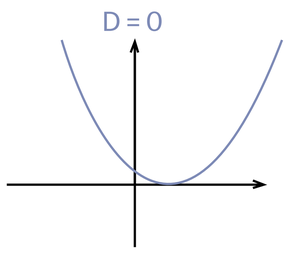
$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

D < 0



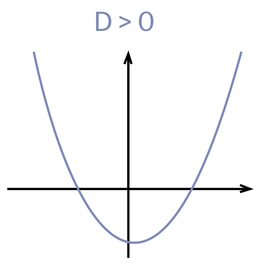
D < 0: решений (общих точек) нет

D = 0



D = 0: одно решение (1 общая точка)

D > 0



D > 0: строго 2 решения (2 общие точки)

Коэффициент c

Представим, что мы хотим найти значение функции в точке x = 0. Подставим x = 0 в функцию $y = ax^2 + bx + c$:
$y = a(0)^2 + b(0) + c = c$.
Получается, что $y = c$. То есть c – это ордината (по оси Oy) точки пересечения параболы с осью Oy.

Разложение на линейные множители

Если существуют действительные корни x_1 и x_2 некоторого квадратного уравнения, то соответствующий трёхчлен можно разложить на линейные множители:

Перепишем $y = ax^2 + bx + c$ в виде: $a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a})$.

По теореме Виета:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2) =$$

$$= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

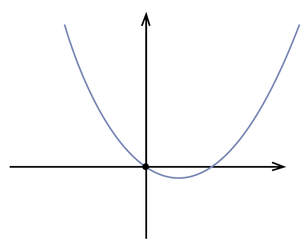
Лайфхак по решению всех заданий №10

Для решения данной задачи по данному алгоритму нам не всегда обязательно помнить, за что отвечает каждый коэффициент функции. Лайфхак заключается в том, что мы берем любые две -- три явные точки на функции, которые проходят через узлы клеток и подставляем их в функцию, записываем полученные уравнения в систему и ищем те значения, которые нам нужны.

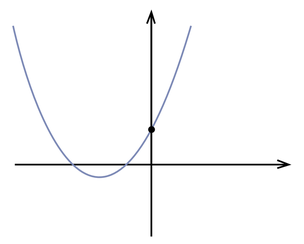
Коэффициент C

При a > 0

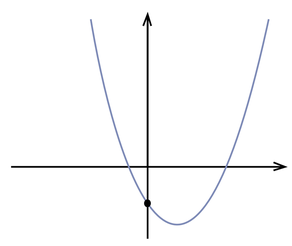
C = 0



C > 0

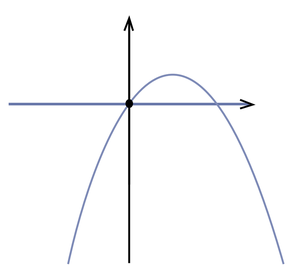


C < 0

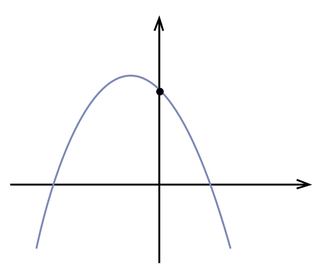


При a < 0

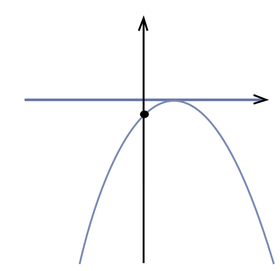
C = 0



C > 0



C < 0



Вершина параболы

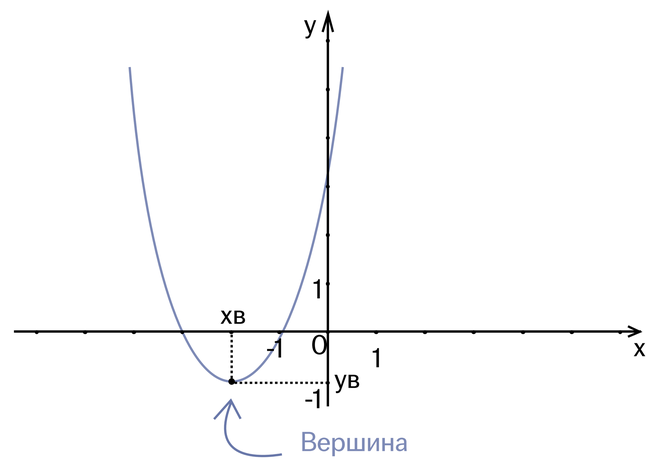
Абсцисса (по оси oX) вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится по формуле:

$$x_в = \frac{-b}{2a}$$

Для нахождения ординаты вершины $y_в$ удобнее всего подставить $x_в$ в уравнение параболы или можно воспользоваться формулой:

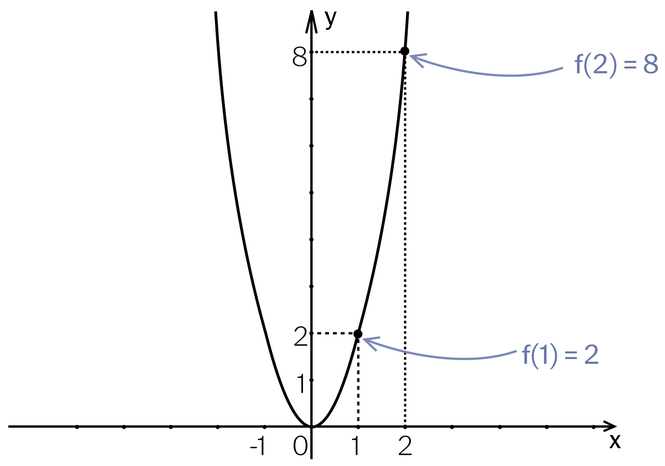
$$y_в = \frac{-D}{4a}$$

D - дискриминант:
$D = b^2 - 4ac$



Что такое f(x)?

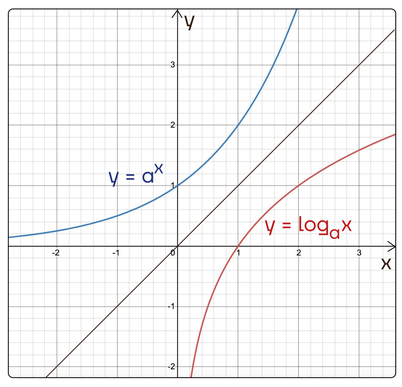
$f(x) = ax^2 + bx + c$ -- это то же самое, что $y = ax^2 + bx + c$. Вместо x в f(x) мы можем подставить любое значение и найти, какое значение по оси 0y будет в этой точке.



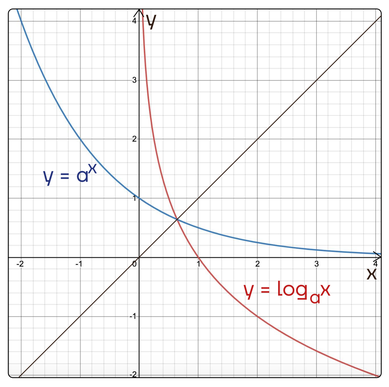
Показательня функция

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где ($a > 0, a \neq 1$), взаимно обратны.

a > 1



a < 1



Показательная функция с разными основаниями

Построим в одной системе координат графики функций $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 9^x$. Видим, что чем больше основание, тем ближе к осям расположен график. Все графики проходят через точку (0; 1).

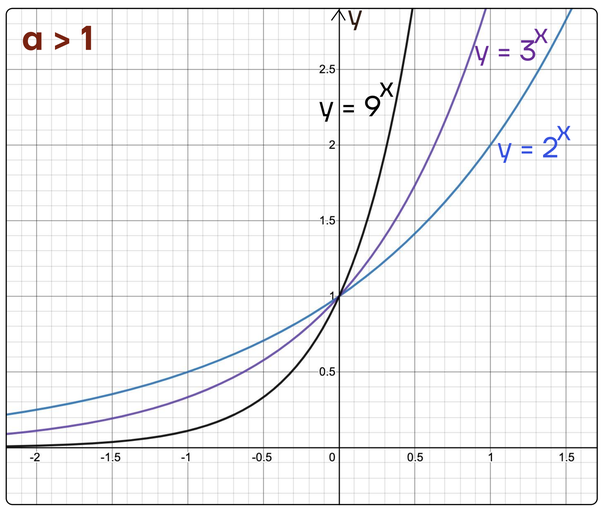


График функции y = f(|x|)

График функции y = f (|x|) симметричен относительно оси ординат. Он состоит из двух ветвей. Построение графика функции y = f(|x|) можно осуществить так:
1) Раскрываем модуль в два случая: когда подмодульное выражение больше или равно нулю и когда подмодульное выражение меньше нуля.
2) Далее мы строим графики относительно раскрытия подмодульных выражений. То есть если мы рассматривали значения при x ⩾ 0, то чертим график функции только в неотрицательной части оси OX. В отрицательную часть оси OX график заходить не будет. При рассмотрении значений x < 0 мы рассматриваем отрицательную область оси OX.

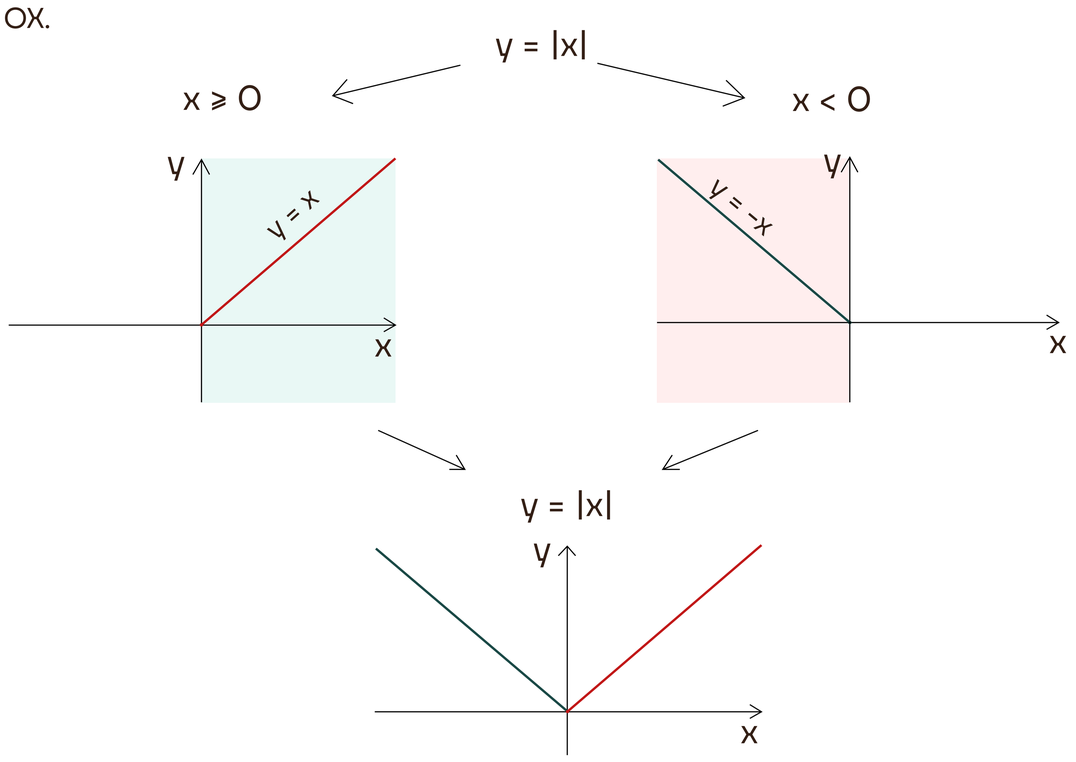
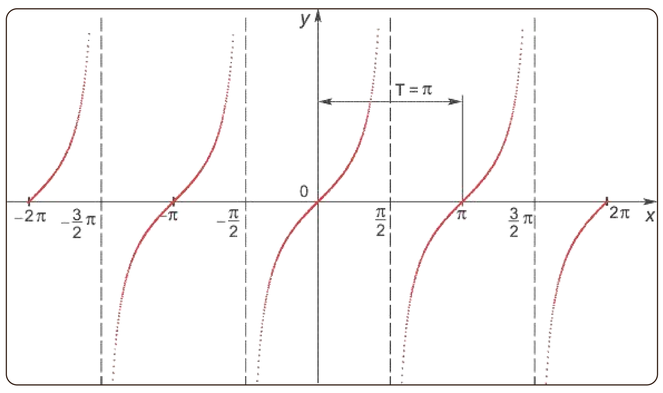


График функции y =| f(x)|

Функция y = |f(x)| характерна тем, что не имеет отрицательных значений.
Чтобы построить график такой функции, нужно:
1) Построить график функции y = f(x).
2) Участок графика, расположенный ниже оси абсцисс (при отрицательных y) развернуть на верхнюю половину координатной сетки преобразованием

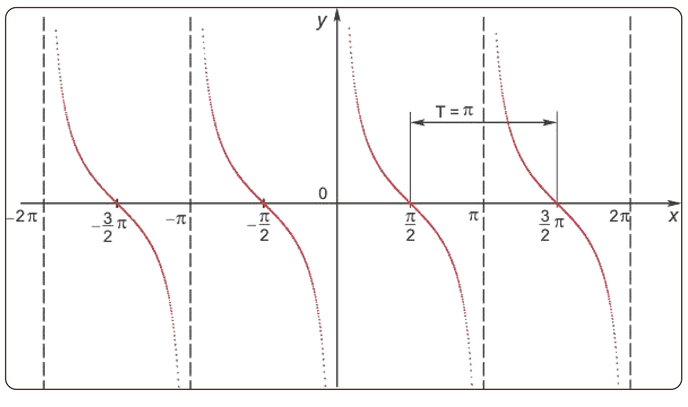
Функция тангенса

ОДЗ $tgx \in R$, кроме $\frac{\pi}{2} + \pi k$. Период тангенса - π.



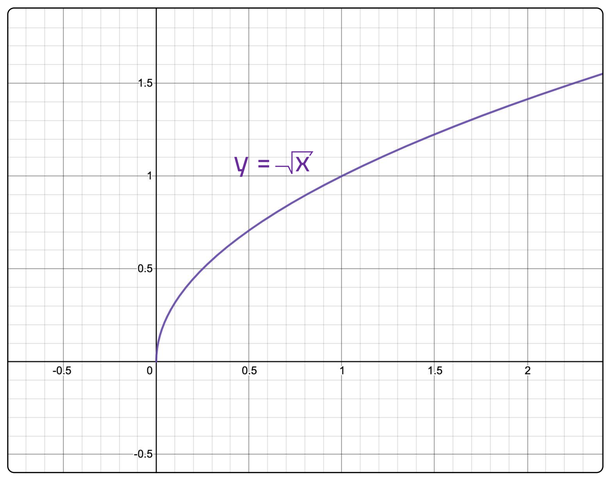
Функция котангенса

ОДЗ $ctgx \in R$, кроме πk. Период котангенса - π.



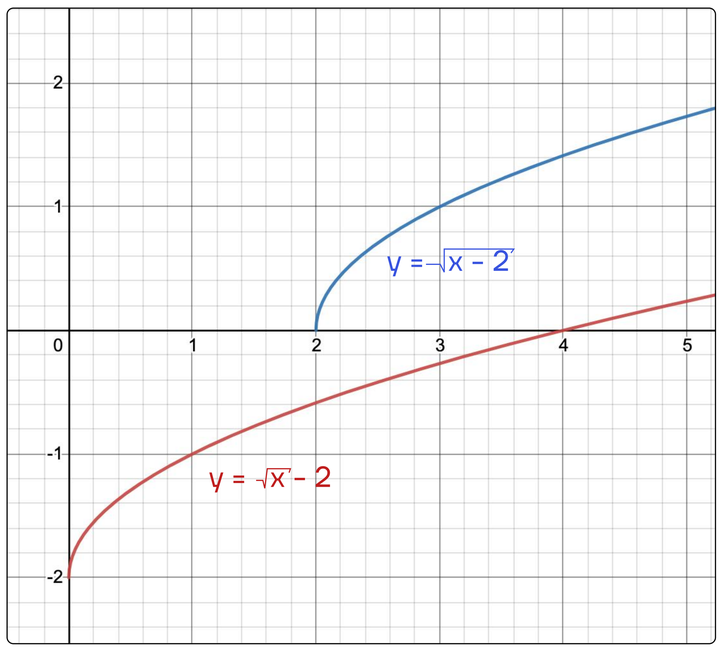
Иррациональная функция

Иррациональные функции — это те, которые содержат в себе аргумент под знаком корня (радикала). Примером такой функции может быть $y = \sqrt{x + 1}$.
В общем виде функция выглядит так: $y = k\sqrt[n]{(x + d)} + b$
Иррациональная функция $y = \sqrt[n]{x}$ выходит из точки (0; 0) и проходит через точку (1; 1) при четном n > 0 и находится в 1 четверти декартовой системы координат.
При нечетном n > 0 функция раскрывается и находится в 1 и 3 четвертях, выходит из точки (0; 0) и проходит через точки (-1; -1) и (1; 1).
Подкоренное выражение должно быть ⩾ 0, иначе функция не существует (ОДЗ).



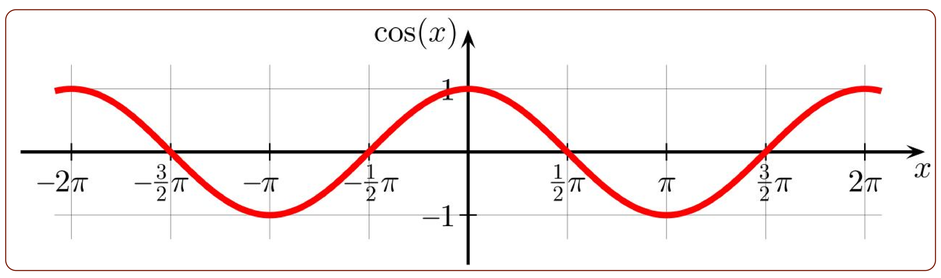
Коэффициент b

Коэффициент b иррациональной функции $y = \sqrt{x} + b$ отвечает за перемещение функции по оси Oy. Если b > 0, то функция поднята относительно начала координат на b вверх. Если b < 0, то функция опущена относительно начала координат на b. Если b внутри корня, то функция двигается по оси Ox влево и вправо.



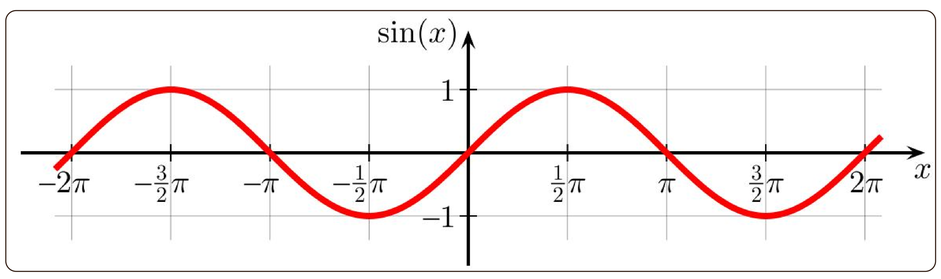
Косинусоида

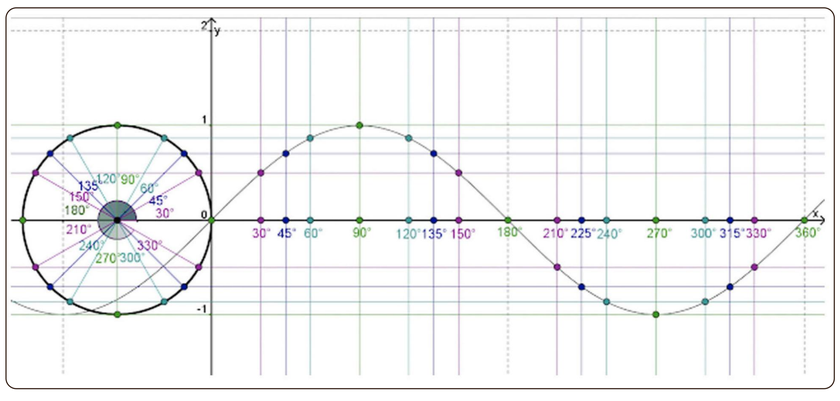
Область значений косинуса -1 ⩽ cosx ⩽ 1. Период косинуса - 2π.



Синусоида

Область значений синуса -1 ⩽ sinx ⩽ 1. Период синуса - 2π.

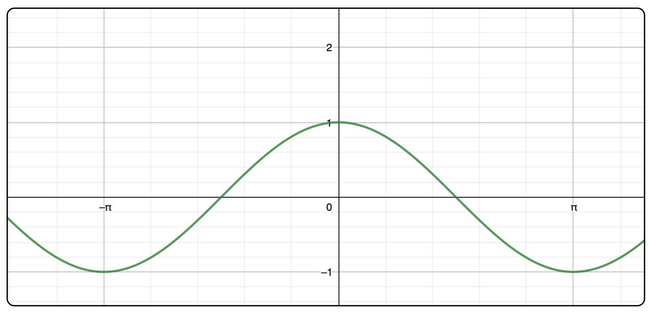




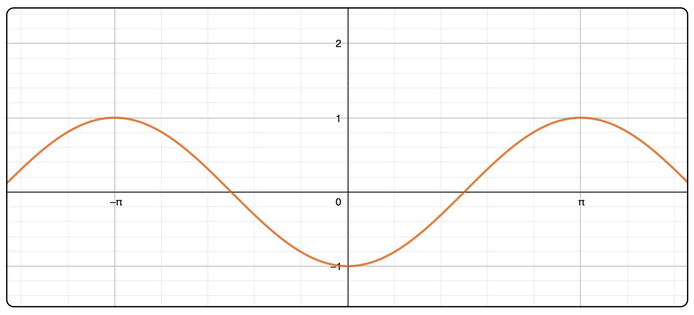
Сдвиг по горизонтали

Пусть функция задана формулой y = cosx.
Тогда график функции y = cos(x − a) сдвинут относительно исходной на a вправо.
График функции y = cos(x + a) сдвинут относительно исходной на a влево.

y = cosx



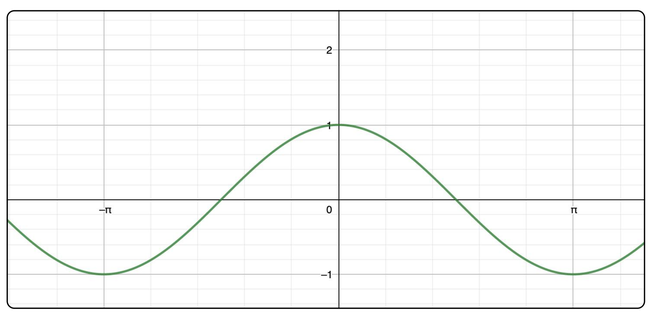
y = cos(x − π)



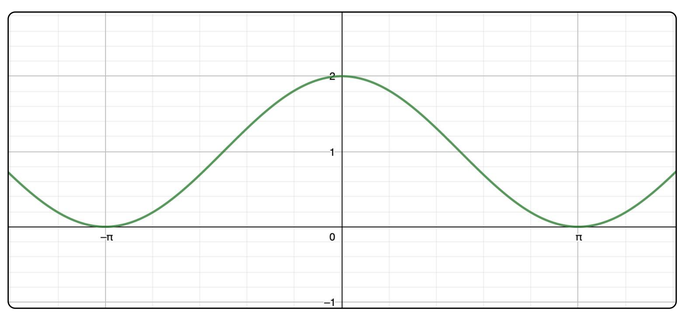
Сдвиг по вертикали

Пусть функция задана формулой y = cosx + d , где d — некоторое положительное число. Тогда график функции y = cosx + d сдвинут относительно исходного на d вверх.
График функции y = cosx − d сдвинут относительно исходного на d вниз.

y = cosx



y = cosx + 1



Углы

Углы при двух параллельных прямых и секущей

Если прямые параллельны и пересечены третьей линией то:

Соответственные углы равны

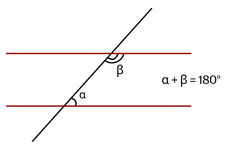
1.

Накрест лежащие углы равны

2.

сумма односторонних углов равна 180°.

3.



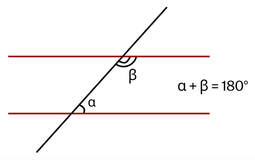
α + β = 180°

Признаки параллельности прямых

1. Если соответственные углы равны, то прямые параллельны:

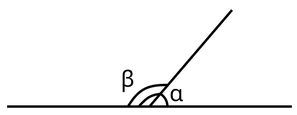
2. Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны:

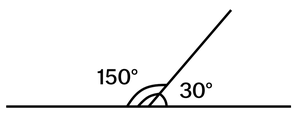
3. Если сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны:



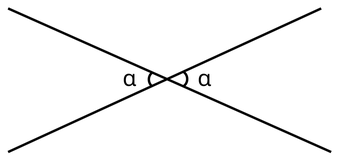
α + β = 180°

Смежные и вертикальные углы



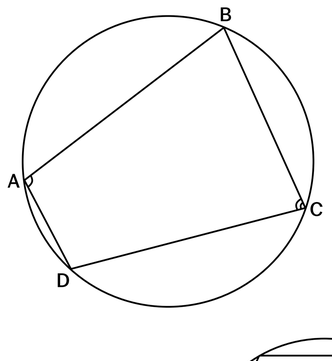


β + α = 180° - смежные углы

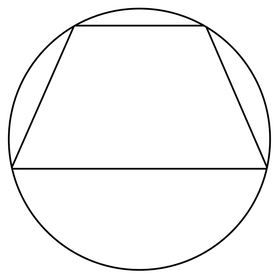


Вертикальные углы равны

Вписанный четырёхугольник

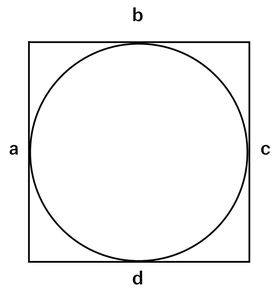


∠A + ∠C = 180°



Если трапеция вписана в окружность, то она обязательна равнобедренная

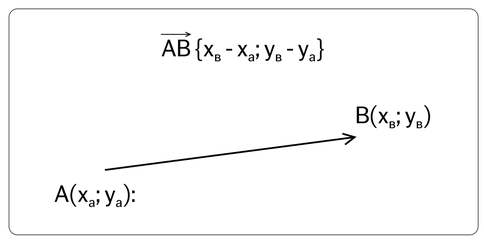
Описанный четырёхугольник



a + c = b + d

1. Координаты вектора

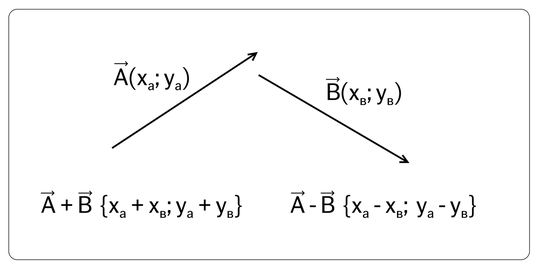
Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляется, как разность координат конца вектора $B(x_в; y_в)$ и координаты начала вектора $A(x_a; y_a)$:



2. Сложение и вычитание векторов координатами

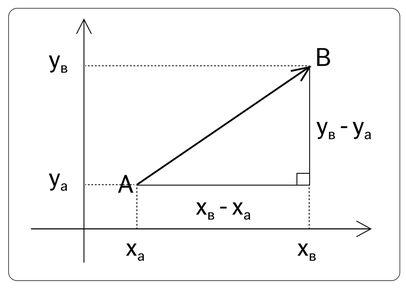
Чтобы из вектора $\vec{A}$ вычесть вектор $\vec{B}$, мы должны вычесть координаты вектора $\vec{B}$ из координат вектора $\vec{A}$.

Чтобы вектор $\vec{A}$ сложить с вектором $\vec{B}$, мы должны сложить координаты вектора $\vec{A}$ с координатами вектора $\vec{B}$.



3. Длина вектора

Длина вектора AB вычисляется по следующей формуле:



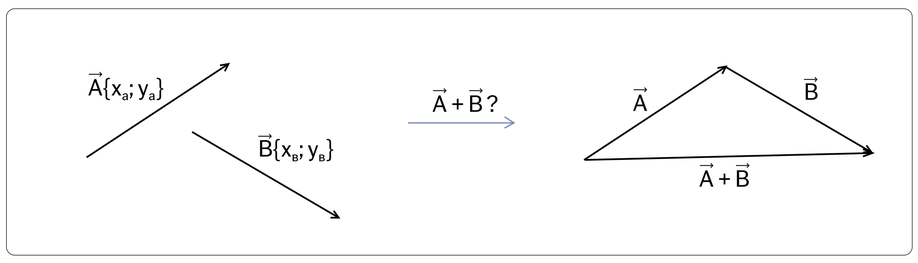
$A(x_a; y_a)$: $B(x_в; y_в)$

$$(\overrightarrow{AB})^2 = (x_в - x_a)^2 + (y_в - y_a)^2$$

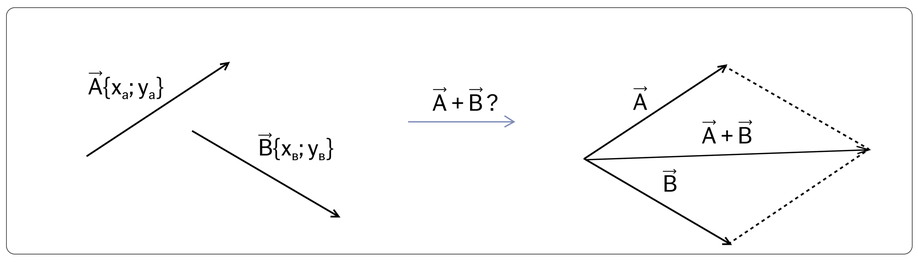
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_в - x_a)^2 + (y_в - y_a)^2}$$

4. Сложение векторов графически

Правило треугольника

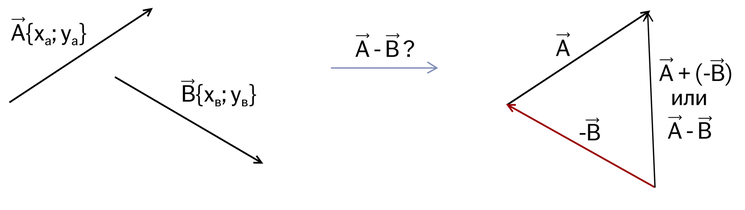


Правило параллелограмма

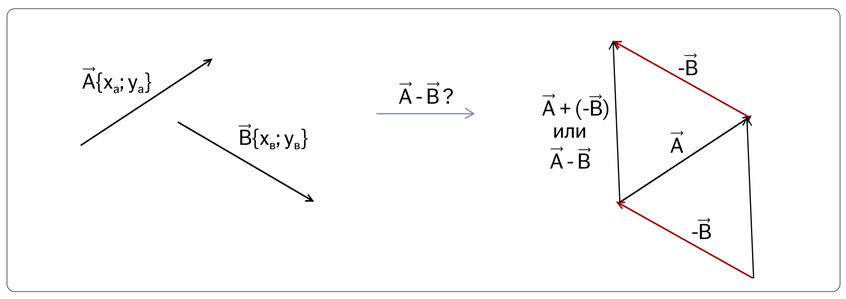


5. Вычитание векторов графически

Правило треугольника

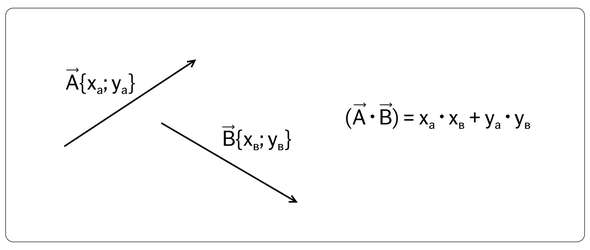


Правило параллелограмма



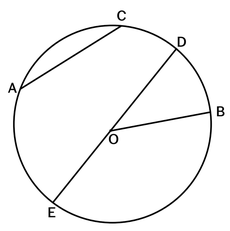
6. Скалярное произведение векторов

Известны координаты



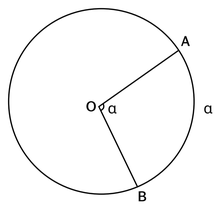
Окружность и ее эллементы

Окружность

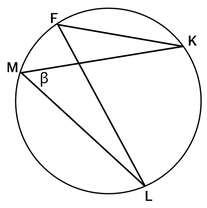


1. O - центр окружности
2. OB - радиус окружности
3. AC - хорда
4. DE - диаметр = 2 радиуса окружности

Углы в окружностях

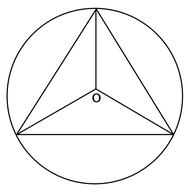


1. Центральный угол равен дуге на которую он опирается (в градусах).



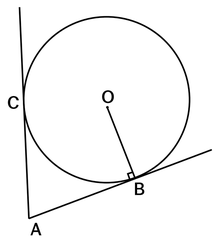
2. Вписанный угол в два раза меньше дуги на которую он опирается (в градусах).
3. ∠LMK = ∠LFK. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу - равны.
4. Центральный угол в два раза больше вписанного.

Описанная окружность



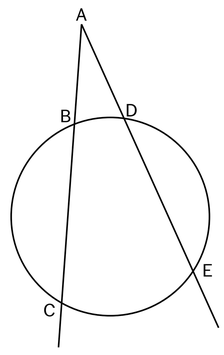
Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров

Касательная



1. AB - касательная
2. OB - радиус окружности, проведенный в точку касания.
3. Отрезки касательных, проведённых из одной точки - равны. AB = AC

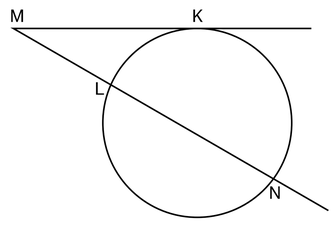
Секущая



Свойство секущих:

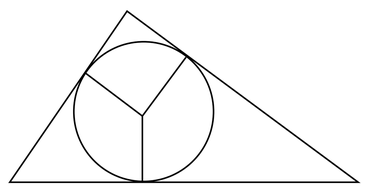
$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Касательная и секущая



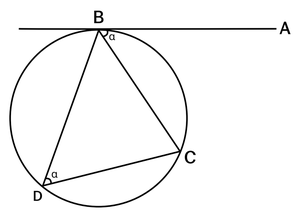
$MK^2 = ML \cdot MN$

Вписанная окружность



Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис

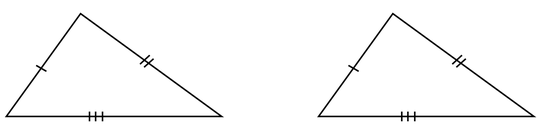
Угол между касательной и хордой



$\angle ABC = \angle BDC$

Треугольники

Равенство треугольников



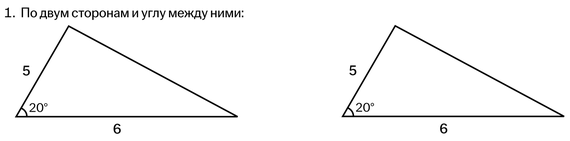
Определение: у равных треугольников равны стороны и углы.

Равны стороны, лежащие напротив равных углов

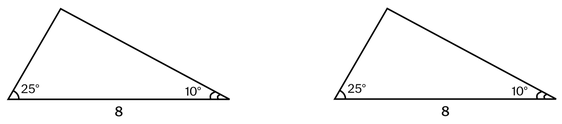
Равны углы, лежащие напротив равных сторон

Признаки равенства треугольников:

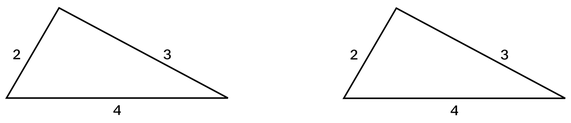
1. По двум сторонам и углу между ними:



2. По стороне и двум прилежащим углам:



3. По трём сторонам:



Признаки подобия

1. По двум сторонам и углу между ними:

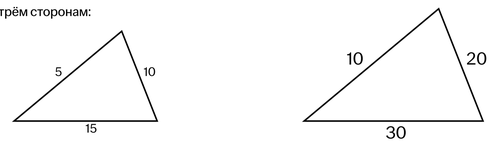
$10 : 5 = 4 : 2$

$\angle 10° = \angle 10°$

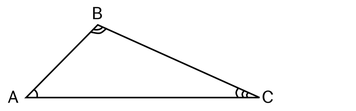
Следовательно треугольники подобны

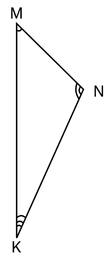
2. По двум углам:

3. По трём сторонам:



Как **верно** записать подобие треугольников?





$\frac{KN}{BC} = \frac{MK}{AC} = \frac{MN}{AB} \longrightarrow \triangle ABC$ подобен $\triangle MNK$.

Подобие треугольников

Определение: треугольники подобны тогда, когда стороны, лежащие напротив равных углов пропорционально равны.

$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$

$\frac{B}{b} = k$ - коэффициент подобия

Связь подобия и площади треугольников:

$S_m = \frac{a \cdot h}{2}$

$S_б = \frac{A \cdot H}{2}$

$\frac{S_m}{S_б} = k^2$

Sin, cos, tg, ctg в треугольнике

$\sin(a) = \frac{b}{c} \quad \cos(a) = \frac{a}{c}$

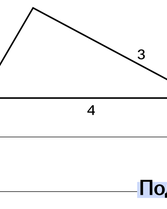
$\operatorname{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{b}{a}$

$\operatorname{ctg}(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)} = \frac{a}{b}$

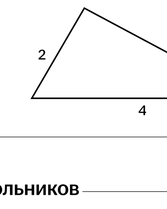
Теорема косинусов

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

Прямоугольный треугольник

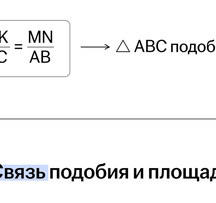


$h = \frac{a \cdot b}{c}$



$h = \sqrt{x \cdot y}$

Теорема синусов

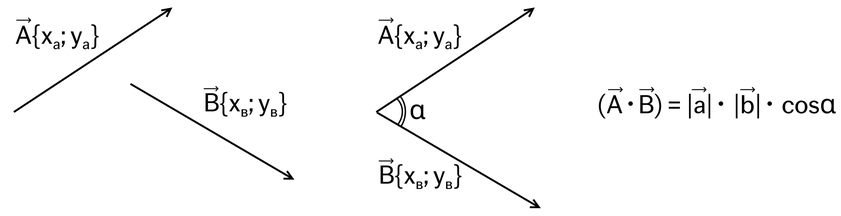


$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$

$\frac{b}{\sin(\beta)} = 2R$

$\frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$

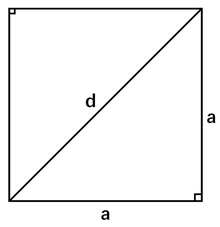
Известен угол



$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Четырехугольники

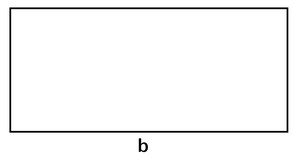
Квадрат, прямоугольник



$S = a^2$

$P = 4a$

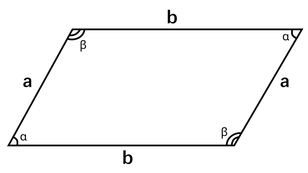
$d = \sqrt{2} \cdot a$



$S = a \cdot b$

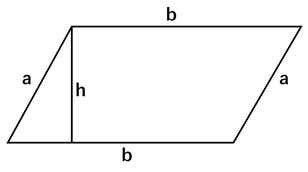
$P = 2(a + b)$

Параллелограмм



Свойства:

1. Противоположные углы равны
2. Точкой пересечения диагонали делятся пополам

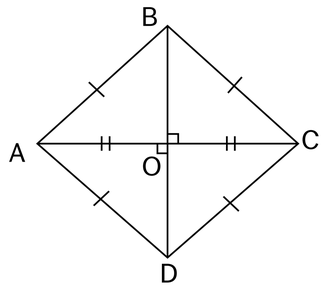


Признаки:

1. Две противоположные стороны равны и параллельны
2. Противоположные стороны попарно параллельны
3. Диагонали точкой пересечения делятся пополам
4. Противоположные углы равны

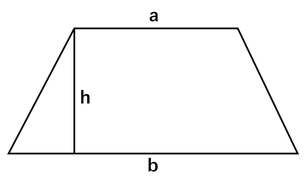
$S = b \cdot h$

Ромб

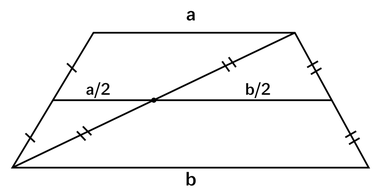


$S_{ABCD} = \frac{AC}{2}(BO + DO) = \frac{AC \cdot BD}{2}$

Трапеция

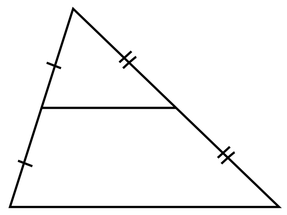


$S = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$



$m\,(\text{ср. линия}) = \frac{a + b}{2}$

Средняя линия треугольника

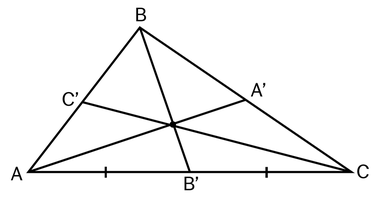


Определение: отрезок, соединяющий середины сторон

Свойства:

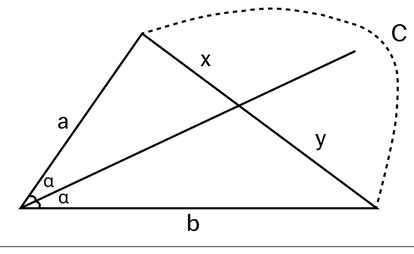
1. Средняя линия параллельна основанию
2. Средняя линия в два раза меньше основания, к которому она параллельна

Медиана в треугольнике



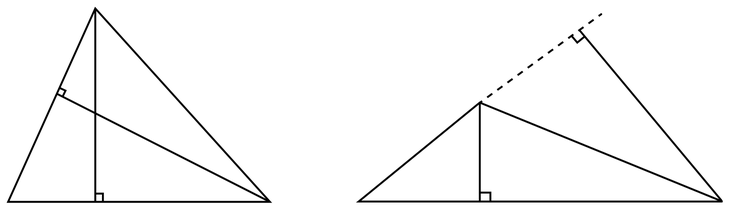
1. Все три медианы пересекаются в одной точке.
2. Медиана делит сторону пополам.
3. В точке пересечения медианы делятся в отношении 2 : 1.
4. Медиана делит треугольник на 2 равновеликих.

Биссектриса в треугольнике



$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

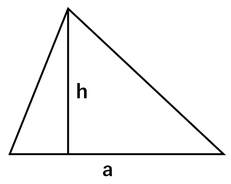
Высота в треугольнике



$$S = \frac{h \cdot a}{2}$$

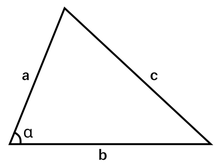
Площадь треугольника

1.



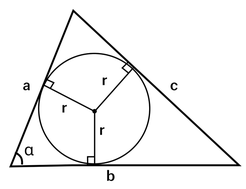
$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h}{2}$$

2.



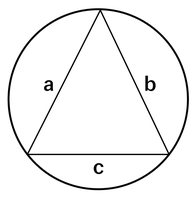
$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

3.



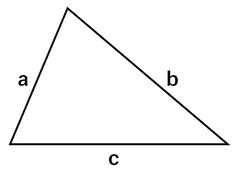
$$S_{\triangle} = \frac{P \cdot r}{2} = p \cdot r$$

4.



$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

5.



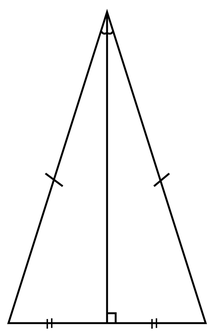
Формула Герона:

$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = 1/2(a+b+c)$$

Равнобедренный треугольник

Определение: Равенство двух сторон.



Свойства:

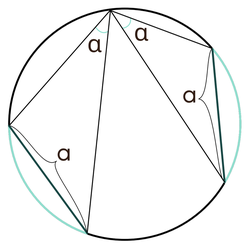
1. Высота является медианой
2. Углы при основании равны

Признаки:

1. Два угла равны
2. Медиана, высота, биссектриса
   - если медиана является высотой, то треугольник равнобедренный.
   - если медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.
   - если высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

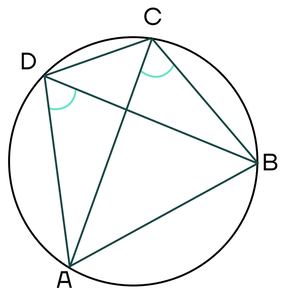
Равные хорды

В одном круге или в равных кругах равные дуги стягиваются равными хордами.



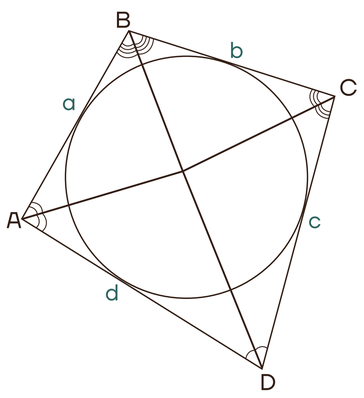
Условие принадлежности четырёх точек одной окружности

Если точки D и C лежат по одну сторону от прямой AB и ∠ADB = ∠ACB, то A, B, C, D лежат на одной окружности.



Вписанная окружность

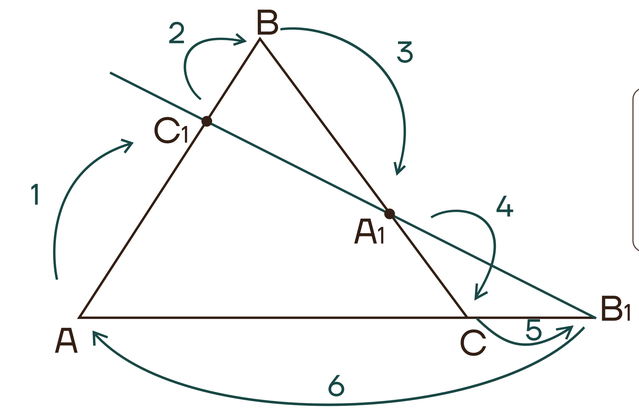
Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.
Наоборот: если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.
Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов четырехугольника.



$$a + c = b + d$$

Теорема Менелая

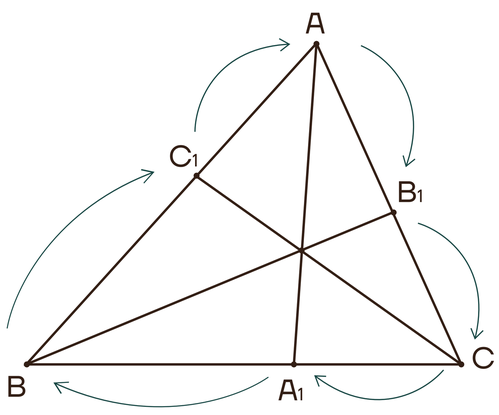
Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC.



$$\underset{2}{\frac{AC_1}{C_1B}} \cdot \underset{4}{\frac{BA_1}{A_1C}} \cdot \underset{6}{\frac{CB_1}{B_1A}} = 1$$

Теорема Чевы

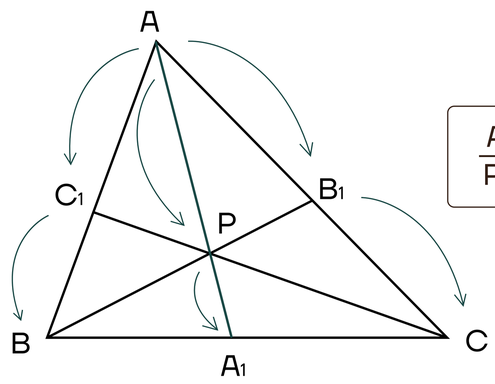
Пусть на прямых AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:



$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

Теорема Ван-Обеля

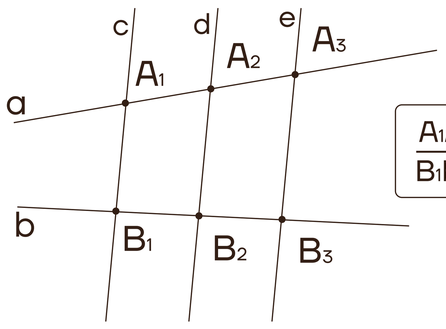
Если прямые AP, BP, CP пересекают прямые BC, CA, AB, содержащие стороны треугольника ABC, соответственно в точках A_1, B_1 и C_1, то имеет место равенство отношений направленных отрезков:



$$\frac{AP}{PA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}$$

Обобщённая теорема Фалеса

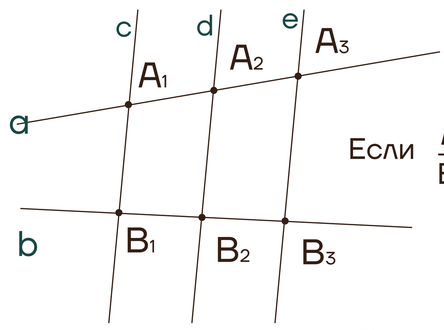
Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки:



$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}$$

Обратная теорема Фалеса

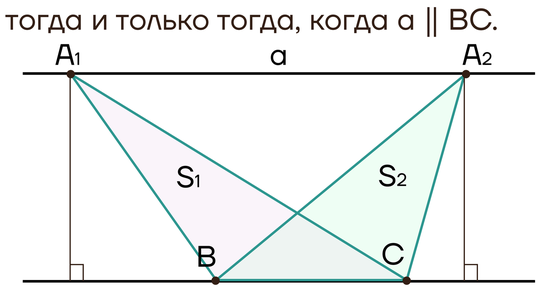
Если прямые, пересекающие две другие прямые, отсекают на обеих из них равные (или пропорциональные) между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



Если $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}$, тогда c || d || e

Рельсы Евклида

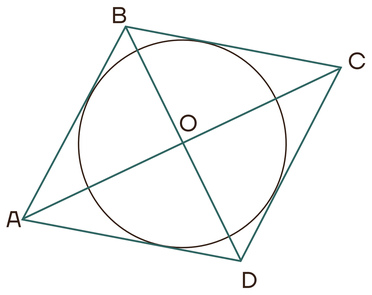
Площади двух треугольников равны, если у них общая сторона и равные высоты, как расстояние между двумя параллельными прямыми.
$S_1 = S_2$ тогда и только тогда, когда a || BC.



$$S_{A_1BC} = S_{A_2BC}$$

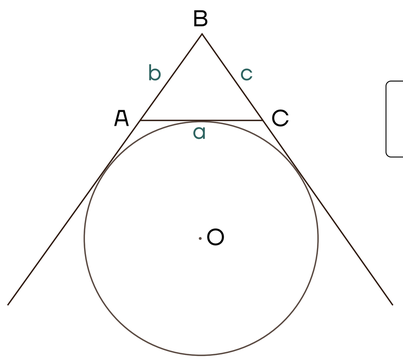
Вписанная окружность для ромба

1. Если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом. Тогда центр окружности лежит на пересечении диагоналей.



Вневписанная окружность

Вневписанная окружность — окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других его сторон.
Радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне a, вычисляется по формуле:

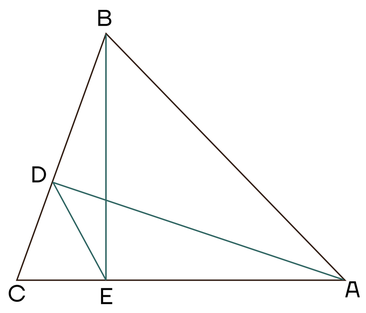


$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

7 свойство ортоцентра

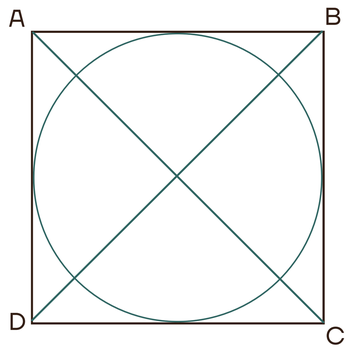
Если AD и BE — высоты треугольника ABC, то треугольник DEC подобен треугольнику ABC с коэффициентом |cos C|.

$$\frac{S_{DEC}}{S_{ABC}} = (\cos C)^2 \qquad \frac{CD}{CA} = |\cos \angle C|$$



Вписанная окружность для квадрата

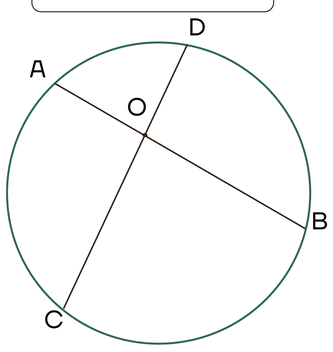
2. Если в прямоугольник можно вписать окружность, то он является квадратом. Тогда центр окружности лежит на пересечении диагоналей.



Теорема о пересекающихся хордах

Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

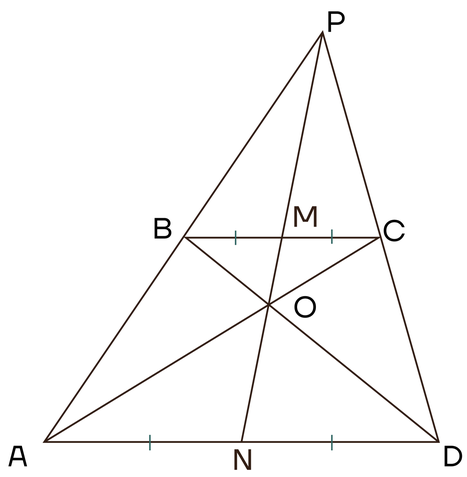
$$AO \cdot BO = CO \cdot DO$$



Замечательное свойство трапеции

(4 замечательные точки трапеции)

Теорема: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной линии.



Чевиана

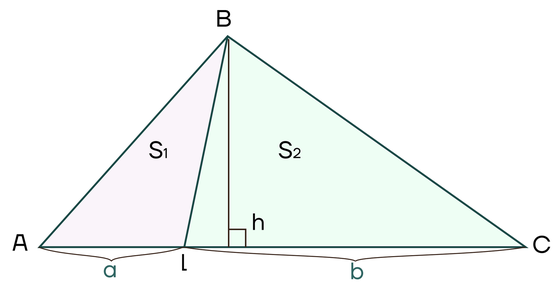
Чевиана - это любой отрезок, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне. Частные случаи чевианы: биссектриса, медиана, высота.

BK - чевиана

Лемма о площадях 1 - Без доказательства на ЕГЭ

Чевиана разбивает сторону треугольника на два отрезка, образуя при этом два треугольника. Площади данных треугольников относятся, как:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{0{,}5 \cdot a \cdot h}{0{,}5 \cdot b \cdot h} = \frac{a}{b}$$

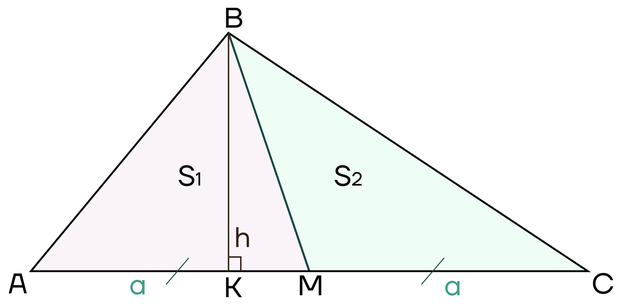


Bl - чевиана

Частный случай: чевиана оказалась медианой

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
Равновеликие треугольники — это треугольники, имеющие равные площади. То есть медиана делит исходный треугольник на два треугольника с равными площадями (или медиана делит площадь треугольника пополам).

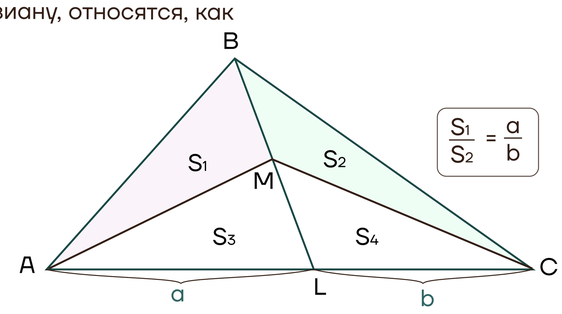
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{0{,}5 \cdot a \cdot h}{0{,}5 \cdot a \cdot h} = 1$$
$$S_1 = S_2$$



BM - медиана

Лемма о площадях 2 - С доказательством на ЕГЭ

Если на чевиане взять произвольную точку M, то она разделяет треугольник на 4 треугольника. Площади двух треугольников, не прилежащих к стороне, к которой провели чевиану, относятся, как



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

Рассмотрим треугольник AMC и чевиану ML, по лемме 1: $\frac{S_3}{S_4} = \frac{a}{b}$

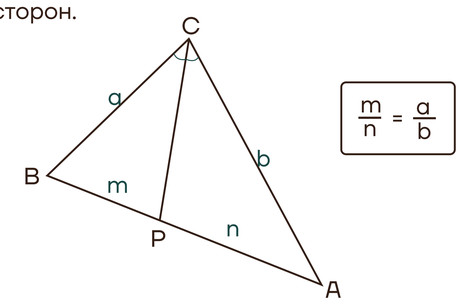
Рассмотрим треугольник BCL и чевиану CM, по лемме 1: $\frac{S_2}{S_4} = \frac{BM}{ML}$

Рассмотрим треугольник LAB и чевиану AM, по лемме 1: $\frac{S_1}{S_3} = \frac{BM}{ML}$

Заметим: $\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_2}{S_4}$, выразим $\frac{S_1}{S_2}$: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{a}{b}$

Свойство биссектрисы

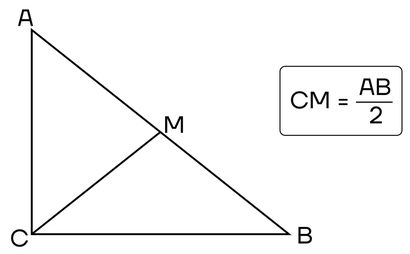
Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.



$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

Медиана в прямоугольном треугольнике

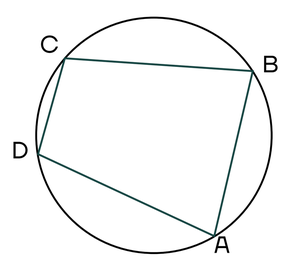
Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



$$CM = \frac{AB}{2}$$

Признак вписанного четырёхугольника

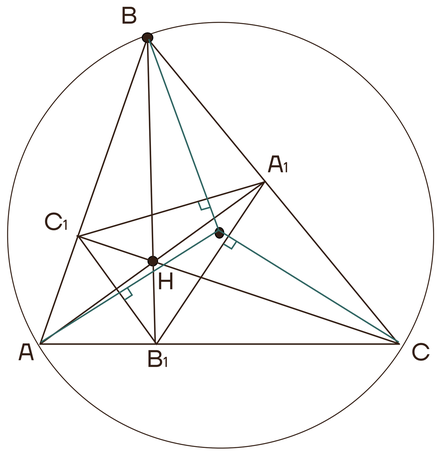
Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то этот четырёх - угольник вписанный.



$\angle C + \angle A = 180°$

6 свойство ортоцентра

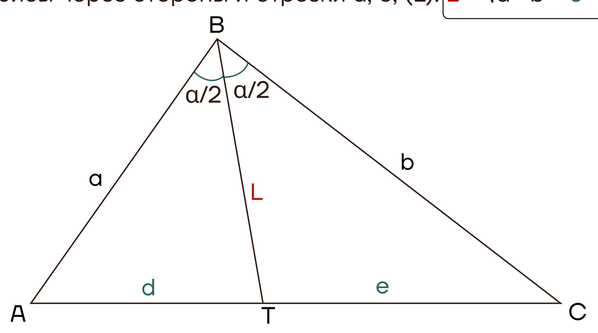
Радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника. Ортотреугольник - это треугольник $\Delta A_1B_1C_1$, вершины которого являются основаниями высот треугольника ABC.



Формула длины биссектрисы

Длина биссектрисы через две стороны и угол, (L): $L = \frac{2ab \cdot \cos(\alpha/2)}{a + b}$

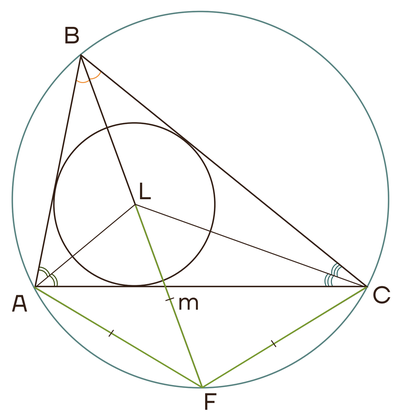
Длина биссектрисы через стороны и отрезки d, e, (L): $L = \sqrt{a \cdot b - e \cdot d'}$



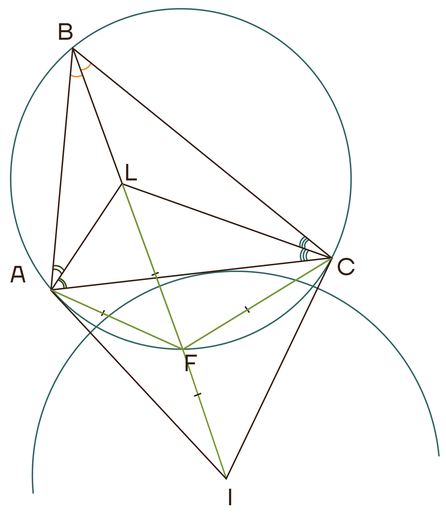
L - биссектриса, отрезок, который делит угол ABC пополам
a, b - стороны треугольника
c - сторона, на которую опущена биссектриса
d, e - отрезки, полученные делением биссектрисой стороны AC
α - угол ABC, разделенный биссектрисой пополам

Лемма о трезубце

Лемма о трезубце. Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность m в точке F, а L является центром вписанной окружности. Тогда FL = FA = FC.

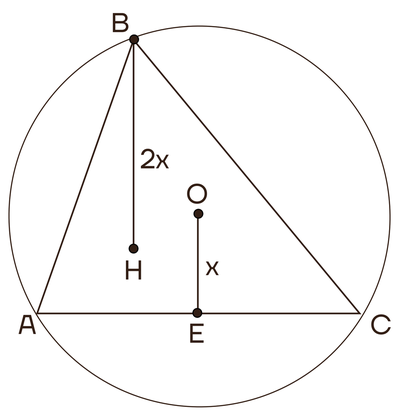


Обобщенная лемма о трезубце. Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность m в точке F, а L является центром вписанной окружности, I — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC.
Тогда FL = FA = FC = FI.



5 свойство ортоцентра

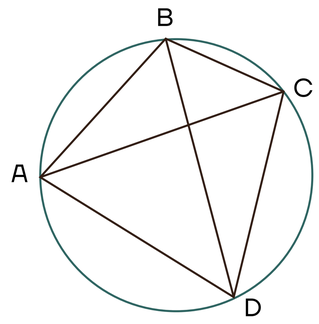
Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.
Или более сложное и каноничное определение: При изогональном сопряжении ортоцентр переходит в центр описанной окружности.



OE= BH/2, OE || BH

Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

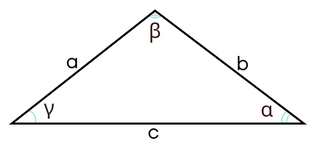


$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

Теорема косинусов

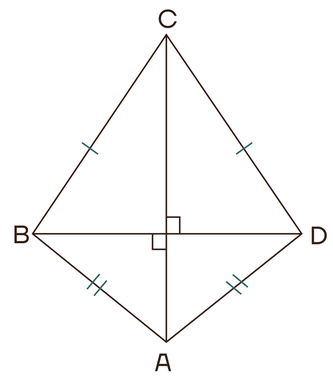
Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\gamma$
$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos\beta$



Дельтоид

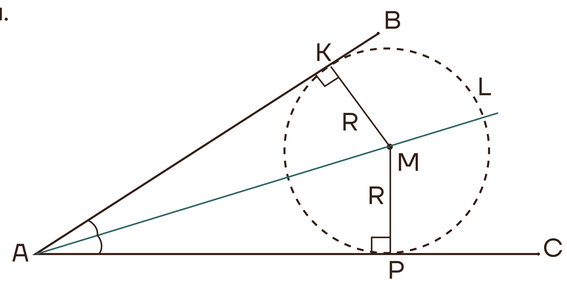
Дельтоид - четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.
Диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны.



$\begin{cases} AB = AD \\ BC = CD \end{cases} \longrightarrow$ Дельтоид

Теорема о биссектрисе угла

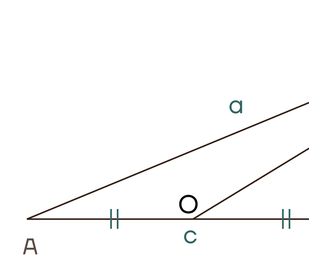
Если точка M лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон угла, то есть расстояния от точки M до AC и до AB сторон угла равны.



Справедлива обратная теорема: если точка равноудалена от сторон неразвернутого угла, то она лежит на его биссектрисе.

Касательная и секущая

Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.



$OA^2 = OB \cdot OC$

Секущие

Для любых двух секущих, проходящих через некоторую точку, выполняется равенство:

$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Формула длины медианы

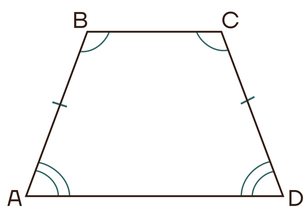
Формула через три стороны: $M = 0{,}5 \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

Формула через две стороны и угол между ними : $M = 0{,}5 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2a \cdot b \cdot \cos\alpha}$

AO - медиана (M)
a, b - боковые стороны
c - сторона, к которой проведена медиана

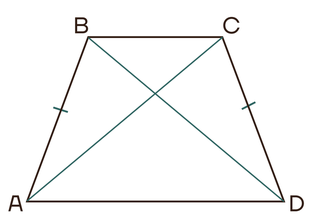
Признаки равнобедренной трапеции

1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.



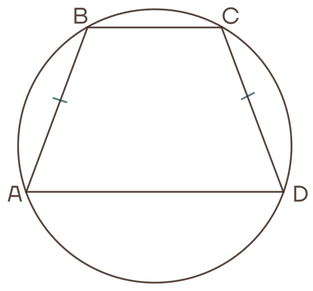
∠ABC = ∠BCD
∠BAD = ∠ADC

2. В равнобедренной трапеции длины диагоналей равны.

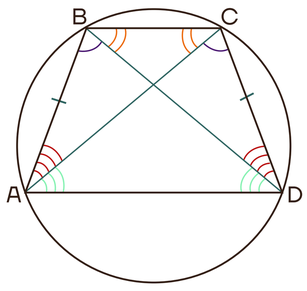


BD = AC

3. Если трапецию можно вписать в окружность, то трапеция – равнобедренная. Опять же, около равнобедренной трапеции можно описать окружность.



4. В равнобедренной трапеции одинаковые углы между диагоналями и основаниями.

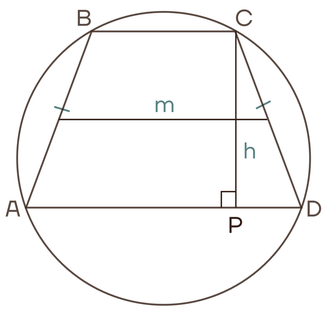


1) ∠ABD = ∠ACD
2) ∠DBC = ∠ACB
3) ∠CAD = ∠ADB
4) ∠BAC = ∠BDC

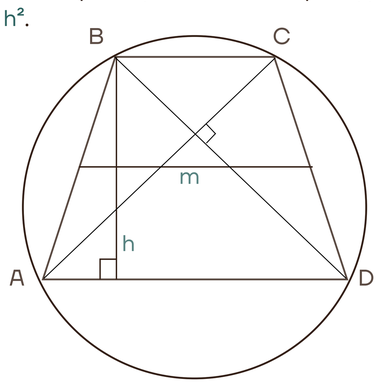
Основные свойства равнобедренной трапеции

1. Высота (CP) равнобедренной трапеции, опущенная из вершины (C) на большее основание (AD), делит его на большой отрезок (AP), который равен полусумме оснований и меньший (PD) - равен полуразности оснований:

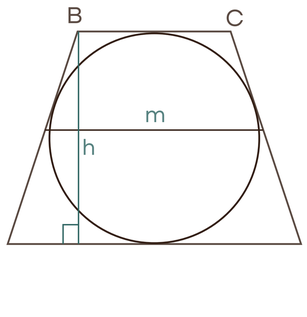
$$AP = \frac{BC + AD}{2} \qquad PD = \frac{AD - BC}{2}$$



2. Если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований (средней линии): h = m.
3. Если в равнобедренной диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то площадь трапеции равна квадрату высоты: $S_{ABCD} = h^2$.



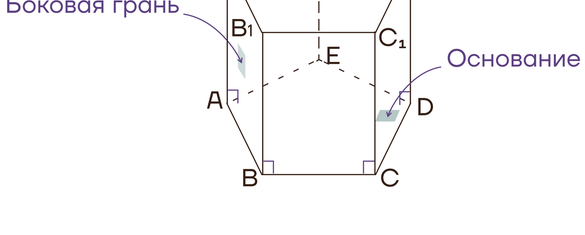
4. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона равна средней линии трапеции: AB = CD = m.
5. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то квадрат высоты равен произведению оснований трапеции: $h^2 = BC \cdot AD$.



Призма

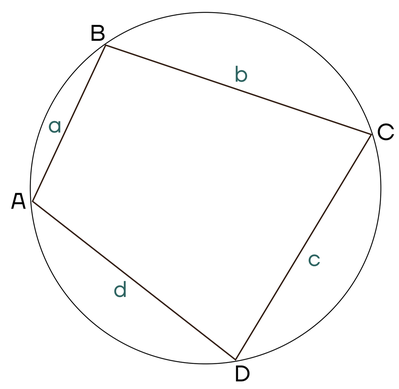
Призма — многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.
Если боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости основания, то такая призма называется прямой. Все боковые грани прямой призмы - прямоугольники.

$$V_{пр} = S_{осн} \cdot H$$



Формула Брахмагупты

Помним формулу Герона? Есть похожая, но для вписанного четырехугольника.
Итак, вот формула площади вписанного в окружность четырехугольника со сторонами a, b, c и d:



$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

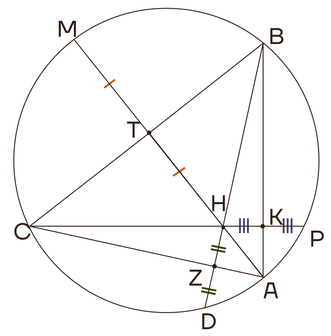
p - полупериметр

Основные свойства ортоцентра

Ортоцентр - это точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника.
Ортотреугольник или ортоцентрический треугольник - это треугольник, вершины которого являются основаниями высот данного треугольника.

1 свойство ортоцентра

Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной около него окружности.

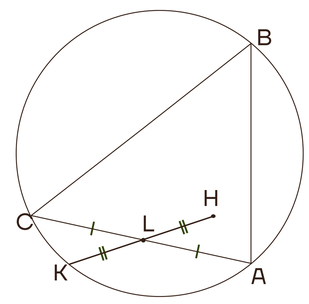


HK = KP; HZ = ZD; MT = TH

2 свойство ортоцентра

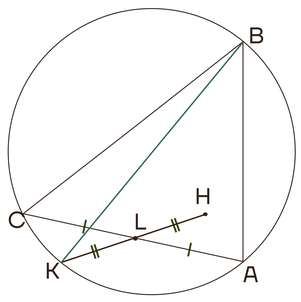
Точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны треугольника, лежит на описанной около него окружности и диаметрально противоположна вершине треугольника, противолежащей данной стороне.

KL = LH, если L - середина AC



3 свойство ортоцентра

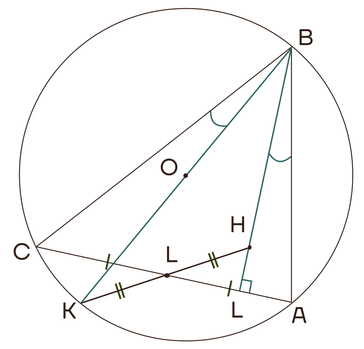
Если KL = LH, если L - середина AC, то BK равно диаметру описанной окружности.
H - ортоцентр.



KB - диаметр, если KL = LH и L - середина AC

4 свойство ортоцентра

Угол между стороной и высотой, опущенных из одной вершины, равен углу между диаметром описанной окружности и другой боковой стороной треугольника, выходящей из той же вершины треугольника.



∠CBK = ∠LBA

Площади полной и боковой поверхности призмы

Площадь боковой поверхности прямой призмы равняется произведению периметра ее основания на высоту. Либо же просто сумме площадей всех боковых граней.

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$$

Площадь (S) полной поверхности призмы равна сумме площади ее боковой поверхности и двух площадей основания:

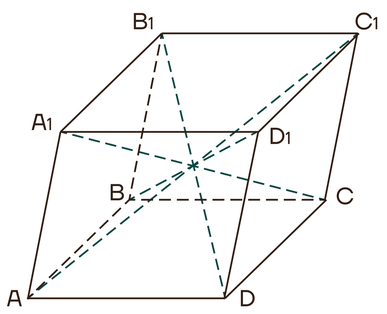
$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{основания}$$

Параллелепипед

Параллелепипед — четырёхугольная призма, основанием которой служит параллелограмм.

Свойства параллелепипеда:

1) Параллелепипед имеет шесть граней и все они - параллелограммы.
2) Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
3) У параллелепипеда четыре диагонали; они все пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.



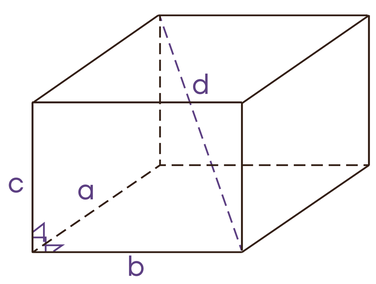
Параллелепипед, у которого все шесть граней - прямоугольники, называется прямоугольным.

Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда и длины его попарно перпендикулярных ребер a, b, c связаны соотношением:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Иногда называют трехмерной теоремой Пифагора



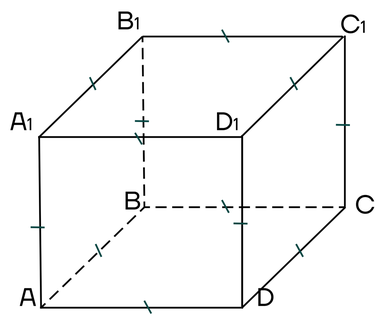
Куб

Куб — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Частный случай параллелепипеда и призмы.

Площадь полной поверхности куба и объем куба выражается формулами:

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$

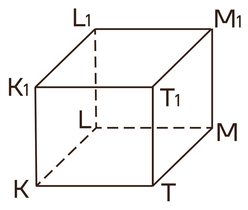


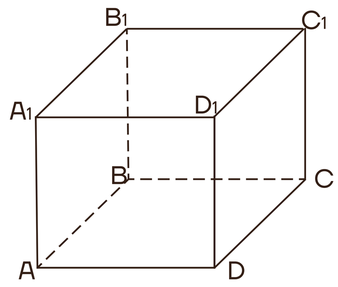
Задачи с использованием подобия

Для подобных пространственных тел, имеющих объем, верна теорема: отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.

$$k = \frac{AD}{KT}$$

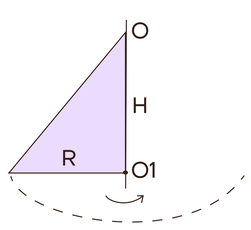
$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$

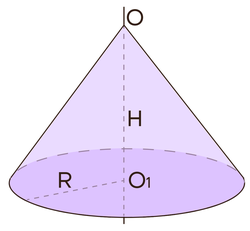




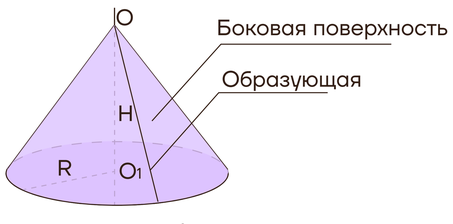
Конус

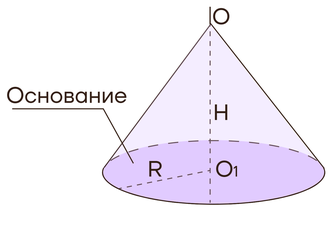
Конус - это тело, получающееся при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из своих катетов.





Конус и его элементы





Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$$

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению числа π на радиус окружности основания и на длину образующей конуса.

$$S = \pi \cdot R \cdot L$$

Пирамида

Пирамида - это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) - это произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани) - треугольники с общей вершиной, называемой вершиной пирамиды.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется высотой пирамиды.

В зависимости от многоугольника, лежащего в основании, пирамида может быть, соответственно, треугольной, четырехугольной, пятиугольной, шестиугольной и т. д.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, где S – площадь основания, H – высота пирамиды.

$$V = \frac{S \cdot H}{3}$$

Правильная пирамида

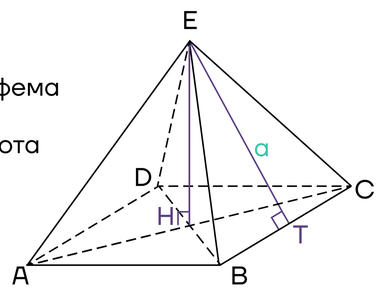
Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник, а ее высота падает в центр основания.

Высота боковой грани называется апофемой правильной пирамиды (ET).

Все боковые ребра правильной пирамиды равны; все боковые грани - равнобедренные треугольники.

ET - апофема

EH - высота



Формула для вычисления площади боковой поверхности правильной пирамиды:

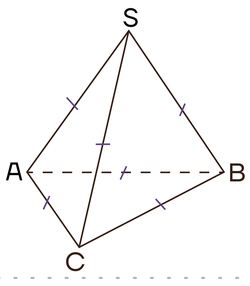
$$S = \frac{P \cdot a}{2}$$

Где P - периметр основания, a - апофема.

Тетраэдр

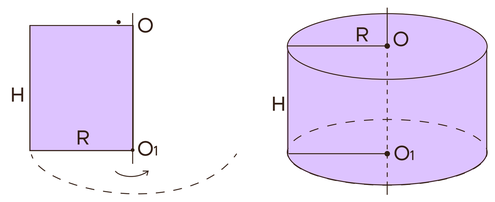
Тетраэдром называется треугольная пирамида.

Правильным называется тетраэдр, у которого все грани - равные правильные треугольники.

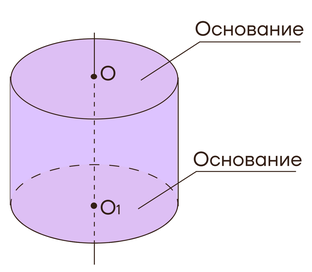


Цилиндр

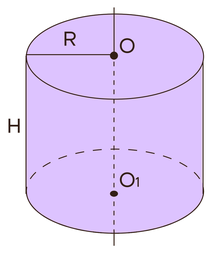
Цилиндр - это тело, получающееся при вращении прямоугольника вокруг одной из своих сторон.



Цилиндр и его элементы



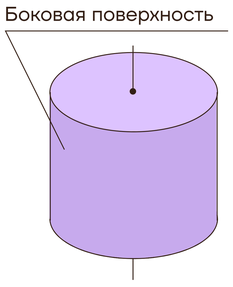
OO1 - ось цилиндра



O и O1 - центры оснований

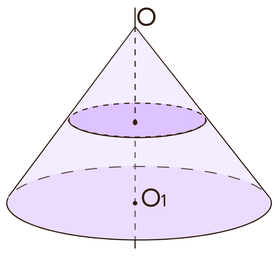
R - радиус цилиндра

H - образующая цилиндра, высота

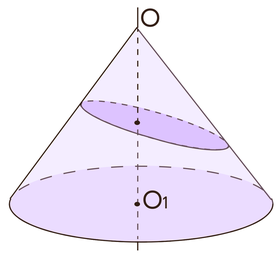


Сечения конуса

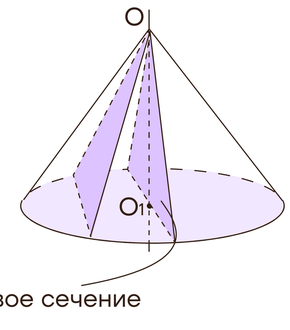
Круг



Эллипс

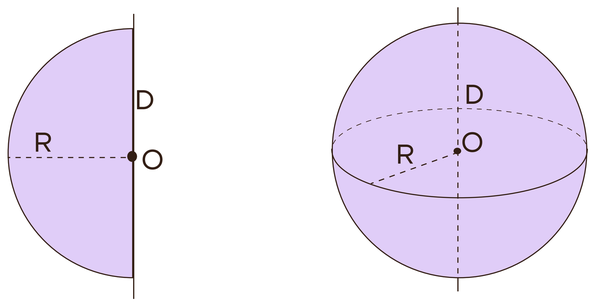


Равнобедренный треугольник



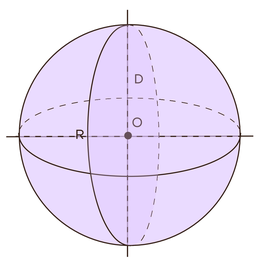
Шар

Шар - это тело, получающееся при вращении полукруга вокруг своего диаметра.

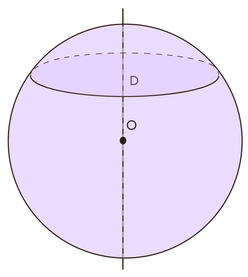


Сечения шара

Осевое сечение (больший круг шара)



Круг



Объем шара равен четырем третьим от его радиуса в кубе, умноженного на число пи.

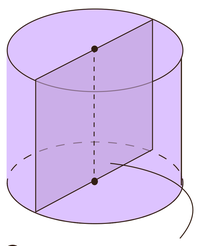
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Площадь поверхности шара равняется квадрату радиуса, умноженному на 4 и на число π

$$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

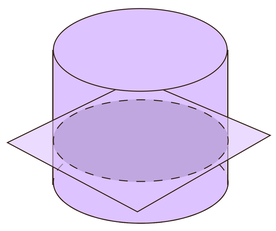
Сечения цилиндра

Прямоугольник

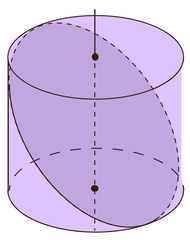


Осевое сечение

Круг

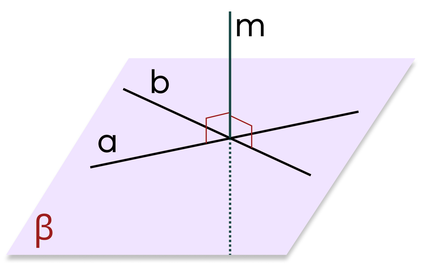


Эллипс



Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости (любой прямой в плоскости).



$$\left.\begin{array}{l} a \in \beta,\ b \in \beta, \\ m \perp a, \\ m \perp b \end{array}\right\} m \perp \beta$$

Перпендикулярность плоскостей

Если угол между плоскостями равен 90 градусов, то плоскости перпендикулярны.

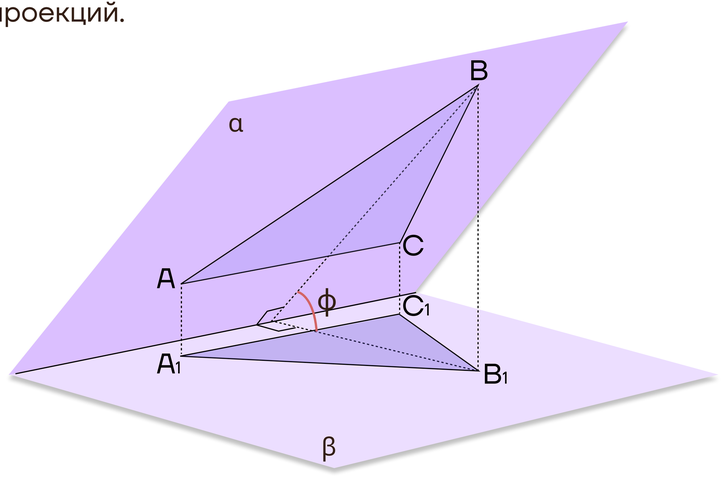
Решая задачи на перпендикулярность плоскостей, мы будем пользоваться следующим признаком перпендикулярности:

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

Площадь ортогональной проекции

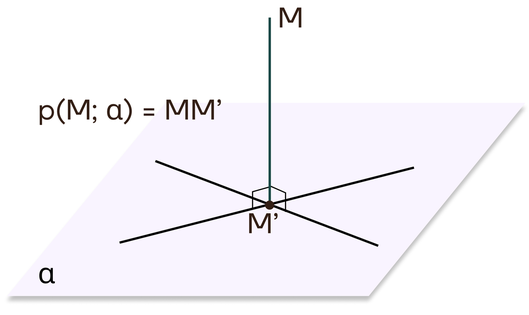
Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций.

$$S(A_1B_1C_1) = S(ABC) \cdot \cos(\phi)$$



Расстояние от точки до плоскости

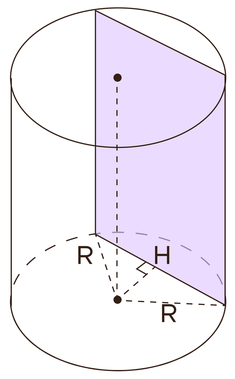
Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.



Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник.

Прямоугольник



Объем и площадь цилиндра

Объем кругового цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

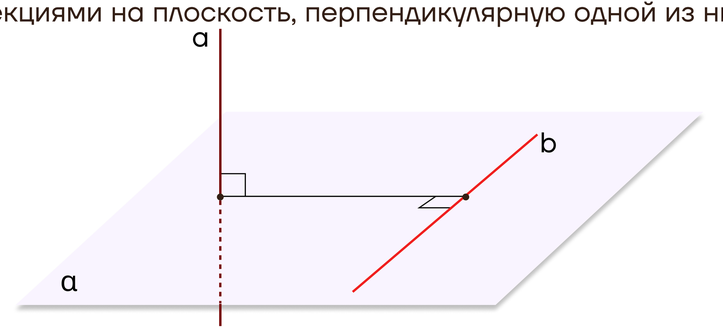
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Площадь поверхности кругового цилиндра равна двум площадям основания цилиндра + площадь боковой поверхности цилиндра.

$$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (R + H)$$

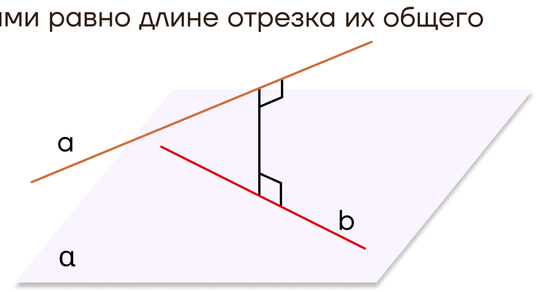
Расстояние от перпендикуляра к плоскости

Если прямая b лежит в плоскости α, а вторая прямая a перпендикулярна этой плоскости, тогда перпендикуляр из точки пересечения прямой a и плоскости α к прямой b и будет искомым расстоянием.
Или же расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них.



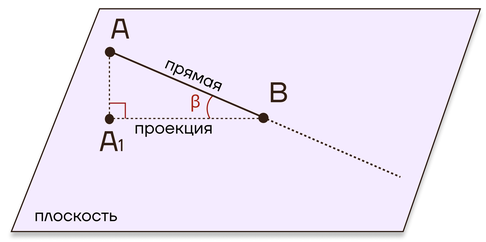
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
Так как через одну из скрещивающихся прямых проходит ровно одна плоскость, параллельная другой прямой, то расстояние между скрещивающимися прямыми - это расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проходящей через вторую прямую параллельно первой.



Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



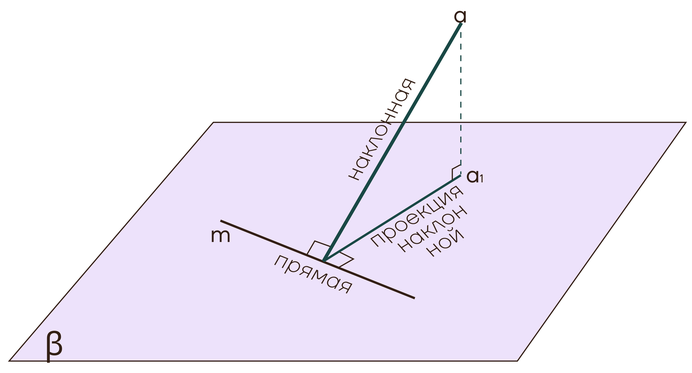
В качестве угла между прямой и плоскостью мы выбираем острый угол.

Чтобы найти угол между наклонной прямой и плоскостью, необходимо отметить некоторую точку A на этой прямой и провести перпендикуляр AA_1 к плоскости. Если B - точка пересечения прямой с плоскостью, то ABA_1 и есть искомый угол.

Теорема о трех перпендикулярах (ТТП)

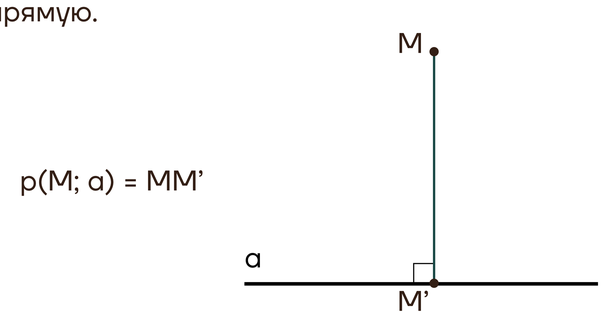
Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

Слова «тогда и только тогда» в формулировке теоремы означают, что прямая m перпендикулярна одновременно и наклонной, и ее проекции. Если m перпендикулярна наклонной, значит, перпендикулярна и ее проекции, и наоборот.



Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.



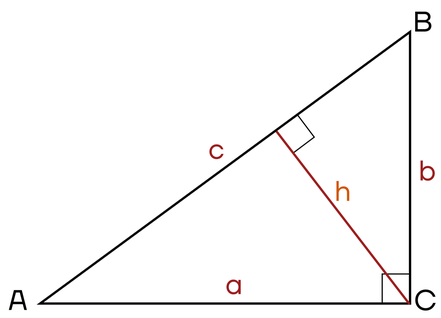
Метод площадей

Метод площадей заключается в том, что мы выражаем кратчайшее расстояние от точки до прямой - высоту через площадь треугольника, выраженную двумя способами. Обычно используется для прямоугольного треугольника.

$$S(ABC) = \frac{a \cdot b}{2} \qquad S(ABC) = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$



Метод объемов

Методом объёмов мы называем приравнивание двух подходящих выражений для объёма, в результате чего удаётся вычислить искомую величину - расстояние.

$$V(SCAB) = \frac{S(SCA) \cdot BH}{3}$$

$$V(SCAB) = \frac{S(ABC) \cdot SB}{3}$$

При вычислении объёма пирамиды можно в качестве основания выбрать любую её грань. Это используется при нахождении расстояния от точки до плоскости; нужно лишь представить искомое расстояние как высоту подходящей пирамиды.

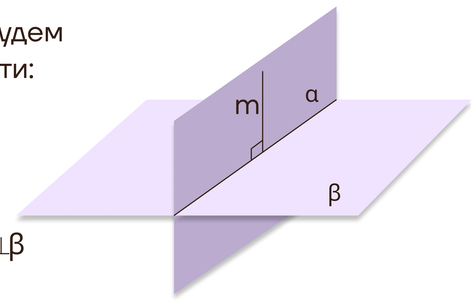
Перпендикулярность плоскостей

Если угол между плоскостями равен 90 градусов, то плоскости перпендикулярны.

Решая задачи на перпендикулярность плоскостей, мы будем пользоваться следующим признаком перпендикулярности:

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

$$\left.\begin{array}{l} m \in \alpha \\ m \perp \beta \end{array}\right\} \alpha \perp \beta$$



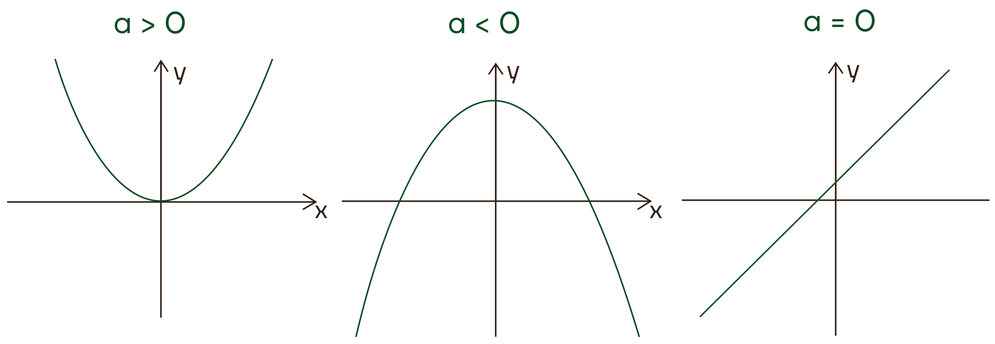
Что такое параметр?

Параметр - это буква a, вместо которой можно подставить число.
Что значит решить задачу с параметром? Это значит найти такие числовые значения параметра a, при которых условие задачи выполнится.

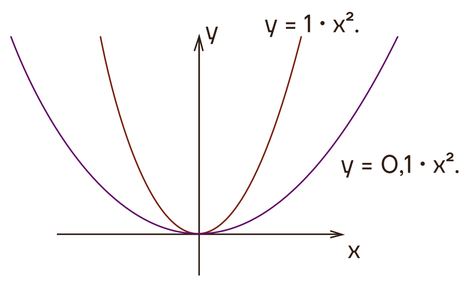
Парабола

Коэффициент a

Знак коэффициента a в функции $y = ax^2 + bx + c$ отвечает за направление ветвей. При $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ - вниз, при $a = 0$ квадратное уравнение превращается в линейное.



Коэффициент a отвечает за ширину параболы. Чем больше |a|, тем уже парабола. Наоборот, чем меньше |a|, тем шире парабола.



Координаты вершины параболы

Абсцисса (по оси ox) вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится по формуле:

$$x_в = \frac{-b}{2a}$$

Для нахождения ординаты вершины $y_в$ удобнее всего подставить $x_в$ в уравнение параболы или можно воспользоваться формулой:

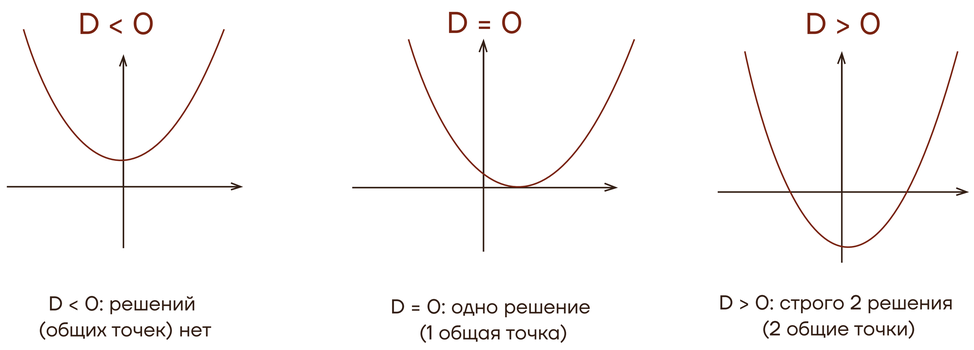
$$y_в = \frac{-D}{4a}$$

D - дискриминант:
$D = b^2 - 4ac$

Дискриминант

Для того чтобы найти количество корней квадратного уравнения, необходимо найти дискриминант квадратного уравнения. Мы можем управлять количеством корней квадратного уравнения, содержащего параметр.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$



D < 0: решений (общих точек) нет

D = 0: одно решение (1 общая точка)

D > 0: строго 2 решения (2 общие точки)

Дискриминантом квадратного уравнения D называется выражение b^2-4ac.

При решении уравнения с помощью дискриминанта возможны три случая:

1. D > 0. Тогда корни уравнения вычисляются по формуле: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
2. D = 0. В этом случае единственный корень вычисляется по формуле: $x = \frac{-b}{2a}$
3. D < 0. В этом случае уравнение не имеет корней.

Корни квадратного уравнения

Для того чтобы найти то, в каких точках парабола пересекекается с осью Ox (найти корни), мы должны приравнять к нулю функцию $y = ax^2 + bx + c$.

Нужно найти в каких точках парабола пересекает ось Ox? → Приравниваем функцию $ax^2 + bx + c$ к нулю → Находим корни данного уравнения

$y = ax^2 + bx + c$ → $ax^2 + bx + c = 0$ → $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Выделение полного квадрата

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$x_в = \frac{-b}{2a} \qquad y_в = \frac{-D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Тогда можем переписать в таком виде: $y = a(x - x_в)^2 + y_в$

Разложение на линейные множители (группировка)

Если существуют действительные корни x_1 и x_2 некоторого квадратного уравнения, то соответствующий трёхчлен можно разложить на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-b/a$, а произведение равно c/a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Как мы видим, рационально применять эту теорему, когда коэффициент a равен единице.

Гипербола в общем виде

В общем виде можем записать функцию гиперболы, как $y = \frac{a}{x - b} + c$, где

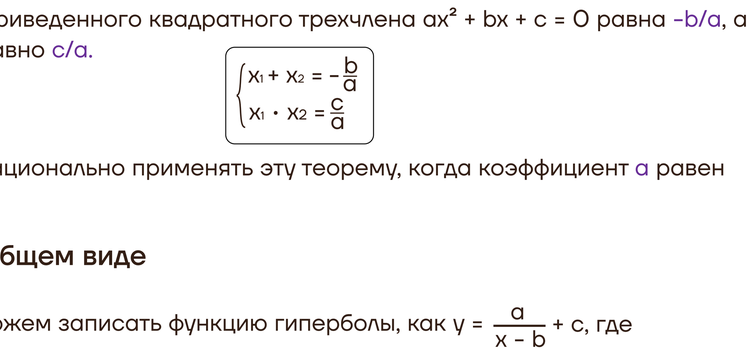
1) b отвечает за перемещение асимптоты по оси Ox относительно начала координат;
2) c отвечает за перемещение асимптоты по оси Oy относительно начала координат;
3) a отвечает за удаленность графика от начало координат.

Уравнение окружности

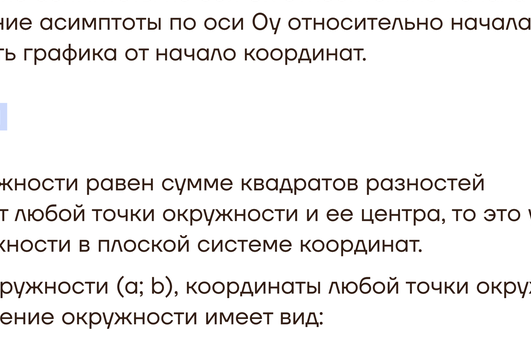
Если квадрат радиуса окружности равен сумме квадратов разностей соответствующих координат любой точки окружности и ее центра, то это уравнение является уравнением окружности в плоской системе координат.

Если координаты центра окружности (a; b), координаты любой точки окружности (x; y), а радиус - R, то уравнение окружности имеет вид:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



Уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$



Уравнение окружности с иррациональным радиусом

Если получилось так, что радиус окружности иррационален, то необходимо вспомнить теорему Пифагора и посмотреть, через какие точки пройдет окружность. Просто берем теорему Пифагора и вместо гипотенузы вставляем радиус, смотрим, какие рациональные катеты должны для этого быть.

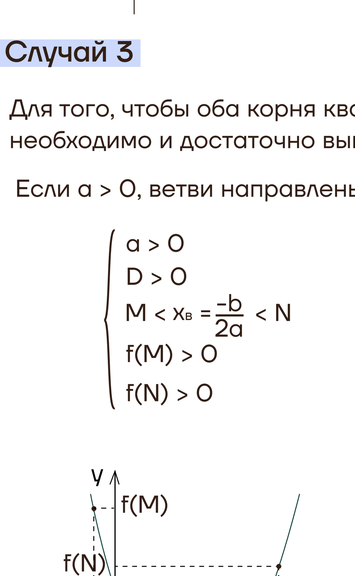
Условия на корни квадратного трехчлена

Случай 1

Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число N (то есть лежали на числовой оси левее, чем точка N), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

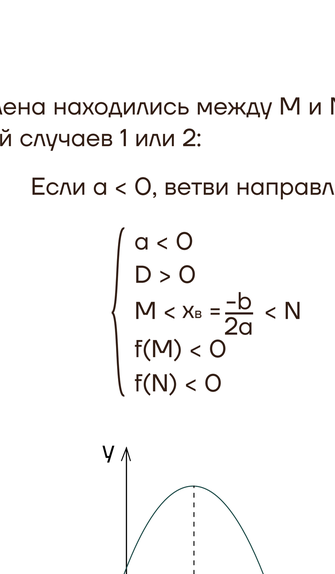
Если a > 0, ветви направлены вверх

$$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ x_в = \frac{-b}{2a} < N \\ f(N) > 0 \end{cases}$$



Если a < 0, ветви направлены вниз

$$\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ x_в = \frac{-b}{2a} < N \\ f(N) < 0 \end{cases}$$



Случай 2

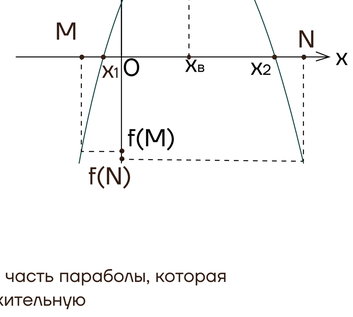
Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше N, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

Если a > 0, ветви направлены вверх

$$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ x_в = \frac{-b}{2a} > N \\ f(N) > 0 \end{cases}$$

Если a < 0, ветви направлены вниз

$$\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ x_в = \frac{-b}{2a} > N \\ f(N) < 0 \end{cases}$$

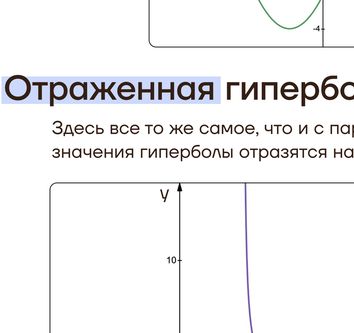


Случай 3

Для того, чтобы оба корня квадратного трёхчлена находились между M и N, необходимо и достаточно выполнение условий случаев 1 или 2:

Если a > 0, ветви направлены вверх

$$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ M < x_в = \frac{-b}{2a} < N \\ f(M) > 0 \\ f(N) > 0 \end{cases}$$



Если a < 0, ветви направлены вниз

$$\begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ M < x_в = \frac{-b}{2a} < N \\ f(M) < 0 \\ f(N) < 0 \end{cases}$$

Отраженная парабола

Функция отраженной параболы имеет вид: $y = |x^2 + 2x - 3|$. Та часть параболы, которая лежит в отрицательной области оси oy, отражается на положительную часть оси Oy. Как строить?
1) Находятся корни параболы (пересечение с y = 0)
2) Строится парабола без модуля
3) Отражаются значения, которые лежат ниже оси Oy на положительную часть оси
4) Значения в отрицательной области оси oy стираются.

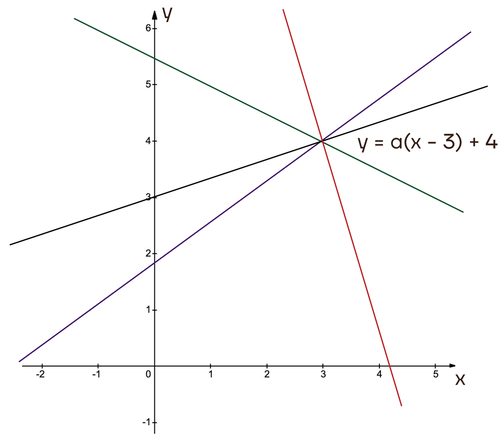
$y = x^2 + 2x - 3$ $\quad$ $y = |x^2 + 2x - 3|$

Отраженная гипербола

Здесь все то же самое, что и с параболой, при добавлении модуля, отрицательные значения гиперболы отразятся на положительную ось oy.

Семейство прямых

Линейная функция с нефиксированным коэффициентом наклона k может задаваться функцией вида y = k(x - b) + m. Данная функция при фиксированных значениях m и b задает “семейство прямых”, которые проходят через одну точку (b; m), “вертятся” вокруг нее.
k отвечает за коэффициент наклона прямой;
b - показывает то, на сколько функция смещена по оси ox;
m - показывает то, на сколько функция смещена по оси oy.



Точка касания прямой и другой нелинейной функции

Способ 1

Чтобы найти точку касания x_0 прямой $y = k \cdot x + b$ и нелинейной функции $y = f(x)$, мы должны приравнять угловой коэффициент линейной функции к производной от нелинейной функции и приравнять функции, далее решить систему уравнений.

$$\begin{cases} k = f(x_0)' \\ k \cdot x_0 + b = f(x_0) \end{cases}$$

x_0 - точка по оси Ox, в которой происходит касание прямой и нелинейной функции.

Способ 2

Чтобы найти точку касания x_0 прямой $y = k \cdot x + b$ и нелинейной функции $y = f(x)$, мы должны приравнять функции и найти дискриминант, далее необходимо приравнять его к нулю.

$$k \cdot x_0 + b = f(x_0)$$
$$D = 0$$

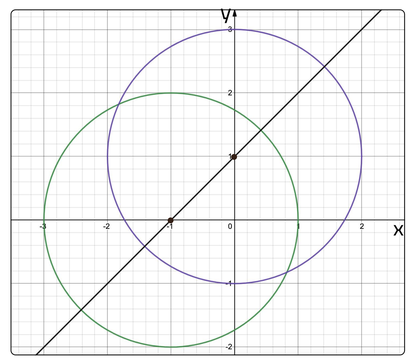
x_0 - точка по оси Ox, в которой происходит касание прямой и нелинейной функции.

Области, заданные “сложными” неравенствами

Для того, чтобы определить, какую область на графике отсекает неравенство:
1) Замените неравенство на уравнение и начертите график.
2) Выберите несколько контрольных точек: выберите точку внутри либо снаружи графика, или ниже, или выше, если график задан линейной функцией, и подставьте их в неравенство. Выполняется ли при этих значениях неравенство? Если да, то именно в этой области существуют его решения.

Движение графика окружности по прямой

Если график модуля окружности смещен по оси Ox и Oy с помощью параметра a, то он двигается по какой-то фиксированной прямой.
Для того, чтобы найти данную прямую, мы должны:
1) Вставить вместо параметра a, значение a = 0. Отметить точку центра окружности.
2) Вставить вместо параметра a, любое удобное значение, например 1. Отметить точку центра окружности.
3) Соединить точки центров двух окружностей и найти уравнение данной прямой. Именно по ней двигается наша окружность с нефиксированным центром.



Движение галочки по прямой

Если график модуля смещен по оси Ox и Oy с помощью параметра a, то он двигается по какой-то фиксированной прямой.
Для того, чтобы найти данную прямую, мы должны:
1) Вставить вместо параметра a значение a = 0. Отметить точку вершины “галочки”.
2) Вставить вместо параметра a любое удобное значение, например 1. Отметить точку вершины “галочки”.
3) Соединить точки вершин двух “галочек” и найти уравнение данной прямой. Именно по ней двигается наша “галочка”.

Метод f(u) = f(v)

Как увидеть, что задача решается по данному методу?
Мы должны увидеть, что в уравнении есть какие-то большие степени и его можно сгруппировать так, что по обе части уравнения мы получим функции вида $t^n + t$.
1) Упрощаем уравнение, замечаем, что по обе части от знака равно в уравнении у нас похожие функции f(x) и g(x) вида $t^n + t$, где n - нечетное.
2) Расматриваем функцию. Доказываем, что функция возрастающае через производную или как сумма двух возрастающих функций.
3) Делаем замену подобных f(x) на u, а подобных g(x) на v.
4) Значение функции $f(u) = u^n + u$ и $f(v) = v^n + v$ совпадут, когда аргументы будут равны: u = v, так как монотонная функция принимает все свои значения единожды.
5) Рассматриваем данные значения, в зависимости от условия задачи.

Один корень на отрезке

Уравнения с параметром на поиск единственного решения на отрезке с помощью аналитики решаются по следующему алгоритму:
1) Ищем ОДЗ уравнения.
2) Ищем значения, при которых наше уравнение выполняется, путем вынесения за скобки общих множителей.
3) Решаем систему с совокупностью нескольких корней, ОДЗ и отрезком из условия.
4) Проверяем значения параметра, при котором наши корни совпадут на отрезке, берем их в ответ.
5) Пишем ответ.

Монотонная функция

Функция y = f(x) строго возрастающая или строго убывающая на промежутке называется монотонной на этом промежутке.

Строго возрастающая функция

Функция y = f(x) называется строго возрастающей на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Строго убывающая функция

Функция g(x) называется строго убывающей на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Связь монотонности функции с ее производной

Если производная функции $f'(x) > 0$ на некотором промежутке A, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом промежутке; если же $f'(x) < 0$ на промежутке B, то функция $y = f(x)$ убывает на этом промежутке.

Четность, симметрия

Чётная функция - функция, не изменяющая своего значения при изменении знака независимой переменной (график её симметричен относительно оси ординат).

Как увидеть, что задача решается по данному методу?
Мы должны увидеть, что в уравнении есть модуль, четные степени или корни, “убивающие” минус и условие на нахождение единственного корня.
1) Переносим все в одному сторону от знака равно, вводим функцию f(x).
2) Проверяем функцию на четность. Вместо x подставляем -x и если функция четная, то мы получаем изначальную функцию. Четная функция имеет четное количество корней, кроме случая $x = 0$, там она имеет единственный корень.
3) Подставляем $x = 0$.
4) Рассматриваем данные значения, в зависимости от условия задачи.

Значение функции

Данные задачи имеют нестандартное условие. Здесь не требуют нахождения количества решений, а просят проанализировать функцию. Чаще всего данный тип задания про кусочки парабол и про изломы разных функций. Данная тема считается сложной и не самой частой. Задание из досрока 2019 года было на эту тему, мы не можем ее проигнорировать.

Алгоритм решения:
1) Раскрываем модуль в два случая.
2) Анализируем получившиеся функции. Если это параболы, то ищем вершины и смотрим куда направлены ветви.
3) Анализируем точку излома. Точка излома - точка, в которой одна функция переходит в другую из-за раскрытия модуля. Если точка излома задана параметром a, то мы должны проанализировать все случаи, где может находиться данный излом: левее левой вершины, в левой вершине, между вершинами, в правой вершине, правее правой вершины. В зависимости от значений, которые может принимать параметр a, мы можем сократить рассматриваемые случаи.
4) Решаем относительно условия задачи на каждом из промежутков, в котором может находиться излом.

Среднее арифметическое

Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ называется число $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Пример: средним арифметическим чисел 1, 2, 3, 4 является число $\frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = 2{,}5$

Количество натуральных делителей

Количество натуральных делителей числа n, записанного в канонической форме, равно $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1)$.
Пример: $36 = 2^2 \cdot 3^2$
Значит число 36 имеет $(2 + 1) \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$ натуральных делителей.

Десятичная запись числа

Определение: Всякое натуральное число N единственным образом представимо в виде
$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, где n – натуральное число или 0, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ – цифры от 0 до 9,
при чем цифра $a_n \neq 0$.
Обозначение: Это представление натурального числа в десятичной системе счисления называют десятичной записью числа. Для краткости мы будем записывать это число в виде $N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ (черта, как правило, ставится, чтобы отличить десятичную запись числа от произведения цифр).
Пример: $\overline{xyz} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 321$.

Диофантово уравнение

Уравнение вида $f(x, y, \dots) = 0$, переменные в котором считаются целочисленными, называется уравнением в целых числах, или диофантовым уравнением. Набор целочисленных значений переменных, при подстановке которых в уравнение получается верное равенство, называется решением диофантова уравнения.

Пример: Уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – диофантово уравнение (если считать, что переменные могут принимать целочисленные значения).
Набор (3; 4; 5) - одно из его решений.

Делимость

Определение: Число a делится на число $b \neq 0$, если существует такое число c, что $a = bc$. В этом случае говорят, что b является делителем числа a.
Обозначение: $a : b$.

Свойства делимости

1. Если a делится на b, то для любого числа k число ka делится на b.
Пример: 16 делится на 4, то 16 • 3 делится на 4.
2. Если a делится на c и b делится на c, то сумма, разность и произведение чисел a и b делятся на c.
Пример: 16 делится на 4 и 12 делится на 4, то сумма: 16 + 12 = 28; разность: 16 - 12 = 4; произведение: 16 • 12 = 192 делятся на 4.
3. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.
Пример: 16 делится на 4 и 4 делится на 2, то 16 делится на 2.
4. Если a делится на c и b делится на d, то ab делится на cd.
Пример: 16 делится на 4 и 6 делится на 2, то 16 • 6 делится на 4 • 2.

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом. Это число называется разностью арифметической прогрессии и обозначается буквой d.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Формула n-го члена арифметической прогрессии

Нетрудно получить формулу n-го члена арифметической прогрессии.
$a_2 = a_1 + d$,
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$,
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$,
Становится ясно, что формула для a_n имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Формулы суммы арифметической прогрессии

Сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) обозначается S_n, т.е.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен произведению предыдущего члена и некоторого фиксированного числа:

$$b_{n+1} = b_n q \ (n = 1, 2, \dots)$$

Фиксированное число q называется знаменателем геометрической прогрессии.
Пример: последовательность 2, 6, 18, 54, . . . является геометрической прогрессией с первым членом 2 и знаменателем 3.

В конечной геометрической прогрессии, состоящей из целых чисел, знаменатель q может не быть целым числом!
Пример: числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3/2.

Формула n-ного члена геометрической прогрессии

Получим формулу n-го члена геометрической прогрессии
$b_2 = b_1 q$,
$b_3 = b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2$,
$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3$
В результате имеем:

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Сумма первых членов геометрической прогрессии

Для суммы $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии нужно знать следующую формулу:

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Свойство геометрической прогрессии

Последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль каждого ее члена, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних, то есть для любого члена n N, $n \geqslant 2$ выполняется равенство $b^2_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

То есть, если числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Тогда справедлива формула

$$b^2 = ac$$

Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$
($p_1, p_2, \dots, p_k$ – попарно различные простые числа, $a_1, a_2, \dots, a_k$ – натуральные числа).
Данная форма записи называется канонической формой записи числа n.
Пример:
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$;
$504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Признаки делимости для десятичной записи числа

1. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.
2. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 3, как и само число.
3. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.
4. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.
5. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 9, как и само число.
6. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11

Пример: число 305792608 делится на 11, так как (8 + 6 + 9 + 5 + 3) — (0 + 2 + 7 + 0) = 22 делится на 11.

Деление с остатком

Пусть a и $b \neq 0$ — два целых числа. Разделить число a на число b с остатком — это значит найти такие числа q и r, что выполнены следующие условия:
1) $a = bq + r$; 2) $0 \leqslant r < |b|$.
При этом число q называется неполным частным, а число r - остатком от деления a на b. Число a именуется делимым, а число b —делителем.
Пример. 5 делим на 2: $5 = 2 \cdot 2 + 1$, остаток равен 1.
Равенство 1 при соблюдении неравенства 2 называют записью деления с остатком. При этом говорят, что число a даёт при делении на b остаток r.
При делении на b может быть не более $|b|$ различных остатков, при этом числа $0, 1, \dots, |b| - 1$ как раз и дают ровно $|b|$ различных остатков.

Теорема

Для любых целых чисел a и $b > 0$ можно поделить с остатком a на $b \neq 0$, т. е. представить a в виде $a = bq + r$, где $q, r \in Z$ и $0 \leqslant r < |b|$, причём такое представление единственно.
Пример: верное равенство $-2018 = 11 \cdot (-183) - 5$ не является записью деления с остатком -2018 на 11, так как число -5 отрицательно и остатком быть не может по определению. Правильная запись этого деления с остатком такова:
$-2018 = 11 \cdot (-184) + 6$.

Сравнение по модулю

Если числа a и b при делении на натуральное число m дают равные остатки, то говорят, что эти числа сравнимы по модулю m, и пишут $a = b \pmod m$.
Иначе говоря, запись $a = b \pmod m$ означает, что разность чисел $a - b$ делится на m.
Пример: $7 = 27 \pmod 5$, $40 = 14 \pmod{13}$, $10 = 3 \pmod 7$.

Среднее геометрическое

Средним геометрическим неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Пример: средним геометрическим чисел 1, 2, 4 является число:

$$\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$$

Неравенство о средних

Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

причем равенство достигается только при $a_1 = a_2 = \dots a_n$.
В частности, для любых неотрицательных чисел a и b выполняется равенство

$$\frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причем равенство достигается только при $a = b$.

Наибольший общий делитель (НОД)

Определение: Наибольший общий делитель (НОД) двух данных чисел «a» и «b» - это наибольшее число, на которое оба числа «a» и «b» делятся без остатка.
Обозначение: НОД(a_1; ... ; a_n) или, если нет риска перепутать, просто (a_1; ... ; a_n).
Пример: НОД(2; 4; 6; 8) = 2.

Чтобы найти НОД двух или более натуральных чисел, нужно:
1) Разложить числа на простые множители. Вычисления удобно записывать с помощью вертикальной черты. Слева от черты сначала записываем делимое, справа — делитель. Далее в левом столбце записываем значения частных.
2) Находим произведение одинаковых множителей и записываем ответ.

Взаимно простые числа через НОД

Напомню, что числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей кроме 1. Иными словами, числа a и b взаимно просты, если НОД (a, b) = 1. Можно сказать и так: числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда дробь a/b несократима.

Наименьшее общее кратное (НОК)

Определение: Наименьшим общим кратным (НОК) двух и более натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое само делится нацело на каждое из этих чисел.
Обозначение: НОК [a_1; ... ;a_n] или, если нет риска перепутать, просто [a_1, ...,a_n].
Пример: НОК чисел 15 и 2 - число 30. То есть минимальное число, делителями которого одновременно могут быть числа 15 и 2 - это число 30.

Чтобы найти НОК двух или более натуральных чисел, нужно:
1) Разложить числа на множители (можно разложить так же, как и НОД).
2) Выписать в строчку множители, входящие в разложение самого большого из чисел, а под ним - разложение второго числа.
3) Подчеркнуть в разложении меньшего числа множители, которые не вошли в разложение большего числа, и добавить эти множители в разложение большего числа.

Теорема

Произведение наименьшего общего кратного (НОК) и наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел равно произведению самих этих двух чисел.
Тогда справедливо равенство НОК[a; b] · НОД(a; b) = ab.

a_k