МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

Заочная школа

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

8-й класс. Задание № 2.

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

Новосибирск

Уважаемый ученик!

Приступая к выполнению задания, внимательно прочтите теоретическую часть задания, которая содержит материал в концентрированном виде, удобном для более глубокого понимания и практического использования при решении задач. Попробуйте самостоятельно решить задачи, указанные в качестве примера. Сравните свой ход решения с решением в задании. Затем приступайте к задачам для самостоятельного решения. Присылайте нам свою работу, даже если Вам не удается довести решение до ответа[1].

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Работа может быть оформлена на бумажном носителе (в ученической тетради в клетку) или в виде файла: лучше всего в виде набранного документа в формате .doc, .docx, .rtf, формулы и рисунки можно делать с помощью встроенного в Word редактора или вставлять в виде небольших картинок, отсканированных (или сфотографированных) с белых листов бумаги. Если Вы собираетесь сканировать работу, то оформляйте **не в тетради, а на белых листах формата А4.** Старайтесь, чтобы количество листов было минимальным. Пишите разборчиво, т.к. после сканирования иногда сложно разобрать текст. **Не нужно** присылать отдельным файлом каждую страницу Вашей работы. Сканируйте все страницы подряд – в один файл! Лучше сохранять в PDF формате.

Обязательно пишите краткое условие задачи, а затем ее решение. Указывайте номера задач – они должны совпадать с теми, которые указаны в задании. Обязательно оставляйте поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради или (если работа в файле, то на 1 странице) нужно указать:

1. Отделение (математическое).
2. Номер задания, тема.
3. Класс, в котором Вы учитесь в Заочной школе.
4. Ваш почтовый адрес (с индексом отделения), конт. телефон, e-mail.
5. Фамилию, имя, отчество.

Убедительно просим оформлять обложку по указанному образцу.

Работу отправлять любым удобным для Вас способом:

● ***на бумажном носителе*****:** простой или заказной бандеролью. В тетрадь вложите листок бумаги размером 6х10 см с Вашим почтовым адресом;

● ***в электронном виде:***

- по e-mail. Тема письма должна совпадать с названием файла с работой: Фамилия_предмет класс - № задания (напр.: Иванов_Математика 10 - 2) В письме обязательно укажите: ФИО, класс, предмет, № задания, тема, регион, конт. телефон. Мы всегда подтверждаем получение Вашей работы;
- или через личный кабинет сайта ЗШ.

Требования к оформлению работ в электронном виде и вся подробная информация есть на сайте ЗШ: https://sesc.nsu.ru/education/zfmsh

Тел..+7(383)363 40 66; E-mail: zfmsh@yandex.ru

Адрес: ЗШ СУНЦ НГУ, ул. Ляпунова, 3, к. 455, Новосибирск-90, 630090

Вместе с рецензией к проверенной работе Вам будут высланы методические указания к решению задач и ответы. Настоятельно рекомендуем прочесть их, даже если Вы получили правильный ответ.[2]

Дорогие ученики!

В этом учебном году в заданиях ЗФМШ вам встретятся задачи, которые могут быть решены с использованием квадратных уравнений. Поэтому рекомендуем вам выполнить задание «квадратный трёхчлен» одним из первых. Темы «квадратный арифметический корень» и «квадратные уравнения», с которыми вы познакомитесь в этом задании, входят в курс алгебры восьмого класса, и мы будем рады, если полученные знания окажутся полезными при изучении школьной программы.

---

[1] *Преподаватель оценит объем задания, который Вам удалось выполнить.*

[2] *Вы можете узнать и о другом способе решения.*

Мы будем изучать свойства квадратного трёхчлена как функции, научимся решать квадратные уравнения и задачи, в которых квадратные уравнения используются.

Замечание. В этом пособии, говоря о числе, мы будем иметь в виду действительные числа - это числа, расположенные на числовой прямой, которые мы можем сравнивать, применять операции сложения, умножения и деления (исключая деление на ноль). В математике существует понятие «комплексное число», но в этом пособии мы **НЕ** рассматриваем комплексные числа.

Квадратным трёхчленом называется выражение $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b и c – числа и $a \neq 0$.

Выражение $3x^2 - 7$ мы можем представить в виде $3x^2 + 0 \cdot x - 7$.

1. Выделение полного квадрата

При работе с квадратным трёхчленом полезно научиться выделять квадрат двучлена, или, другими словами, выделять полный квадрат, то есть приводить квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ к виду $a(x-p)^2 + q$, где p и q - числа.

Значения $p = -\frac{b}{2a}$ и $q = c - \frac{b^2}{4a}$ можно определить из тождества

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

которое можно доказать преобразуя правую часть:

$$\left(a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \left(a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= \left(a\left(x^2 + \ 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= \left(ax^2 + \ 2\cdot a\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

Навык выделения полного квадрата будет полезен вам не только при изучении математики в школе, но и в разделах «интегрирование», «квадратичные формы» и «кривые и поверхности второго порядка» курса Высшей математики.

Пример 1. Выделить квадрат двучлена из квадратного трёхчлена

$$4x^2 - 20x + 24.$$

Решение. На этом примере мы покажем вам, как выделить полный квадрат, проводя рассуждения шаг за шагом, без «зубрёжки формул».

Рассмотрим квадратный трёхчлен $4x^2 - 20x + 24$.

Если ненулевой коэффициент при x^2 не равен единице, то вынесем его за скобки $4x^2 - 20x + 24 = 4(x^2 - 5x + 6)$.

Далее, применяя тождественные преобразования, построим выражение, к которому можно применить известные из школьного курса формулы

$Z^2 + 2\cdot Z\cdot W + W^2 = (Z+W)^2$ или $Z^2 - 2\cdot Z\cdot W + W^2 = (Z-W)^2$.

Коэффициент при x помножим и разделим (тождественное преобразование) на 2, получим $4(x^2-5x+6) = 4(x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+6)$. Анализируя второе слагаемое в скобках, полагаем $Z=x$ и $W=\frac{5}{2}$. Добавим и отнимем (тождественное преобразование) число $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, тогда выражение примет вид

$$4\left(\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\right).$$

Воспользуемся приведённой выше формулой и получим

$$4\left((x-\tfrac{5}{2})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\right)=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+4\cdot\left(6-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)=$$

$$=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+24-4\cdot\frac{25}{4}=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1.$$

Задание выполнено, имеем $4x^2-20x+24=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1$.

Помните, всегда полезно выполнить проверку – раскрыть скобки в правой части равенства. **Ответ**: $4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1$.

Пример 2. Определить, какое наименьшее значение принимает выражение $4x^2-20x+24$ при изменении значения переменной.

Решение. Используем полученное выше равенство

$$4x^2-20x+24=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1.$$

Заметим, квадрат любого действительного числа неотрицателен, поэтому верно неравенство $4x^2-20x+24=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-1\geq-1$. Наименьшее значение будет приниматься, когда выражение в скобках обратится в ноль при $x=\frac{5}{2}$.

Наименьшее значение выражения равно $4\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)^2-1=-1$. **Ответ**: -1.

2. Свойства функции $y(x)=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$, где $a\neq0$, и её график

Вы изучали в 7 классе свойства степенной функции с натуральным показателем и график функции $f(x)=x^2$, которая является частным случаем функции $y(x)=a(x-p)^2+q$ (если положить $a=1,\ p=0$ и $q=0$).

В данном разделе мы будем изучать свойства и график функции

$$y(x)=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q.$$

Напомним, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c может быть представлен в виде $a(x-p)^2+q$, где $a\neq0$, $p=-\frac{b}{2a}$ и $q=c-\frac{b^2}{4a}$.

График функции $\boldsymbol{y(x)=a(x-p)^2+q}$ *(а значит и функции, представленной квадратным трёхчленом* $y(x)=ax^2+bx+c$*)* ***называется параболой.*** Вы познакомились с этим термином ранее, когда изучали график $f(x)=x^2$.

Отметим ряд полезных свойств функции $y(x) = a(x-p)^2 + q$ и её графика.

● Очевидно, что значение функции $y(x) = a(x-p)^2 + q$ при $x = p$ равно q. При этом если $a > 0$, то $y(p) = q$ – минимальное значение функции,

если $a < 0$, то $y(p) = q$ – максимальное.

Поскольку выражение $(x-p)^2 \geq 0$ при всех значениях переменной x и знак слагаемого $a(x-p)^2$ будет определяться знаком коэффициента a, то:

$y(x) = a(x-p)^2 + q \geq q$ при $a > 0$, (рис. 1.2), и

$y(x) = a(x-p)^2 + q \leq q$ при $a < 0$ (рис. 1.1).

Точка с координатами $(p; q)$ на графике функции $y(x) = a(x-p)^2 + q$ носит название – ***вершина параболы***, и при $a < 0$ она занимает верхнее положение на графике (рис. 1.1), а при $a > 0$ нижнее (рис. 1.2).

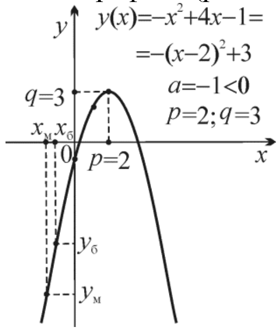

Рис. 1.1

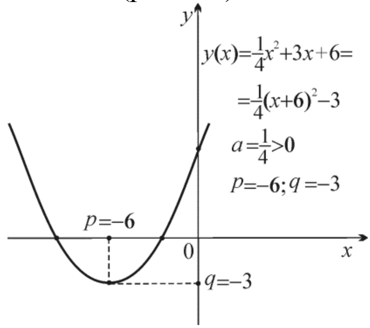

Рис. 1.2

Вершина графика функции, заданной в виде $y(x) = ax^2 + bx + c$, имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$, так как квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ приводится к виду $a(x-p)^2 + q$, где $p = -\frac{b}{2a}$ и $q = c - \frac{b^2}{4a}$.

●● На рис. 1.1. и 1.2. изображены графики функций $y(x) = a(x-p)^2 + q$ для $a < 0$ и $a > 0$ соответственно. Заметим, что:

если $a < 0$, функция $y(x) = a(x-p)^2 + q$ возрастает при $x < p$ и убывает при $x > p$ (рис. 1.1);

если $a > 0$, функция $y(x) = a(x-p)^2 + q$ убывает при $x < p$ и возрастает при $x > p$ (рис. 1.2).

Мы приведём доказательство только для одного из рассматриваемых случаев, остальные случаи доказываются аналогично.

Докажем, что если $a < 0$, то при $x < p$ функция $y(x) = a(x-p)^2 + q$ возрастает (рис. 1.1), другими словами, мы должны доказать, что при $a < 0$, левее вершины, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

То есть из соотношения $x_м < x_б < p$ следует неравенство $y(x_м) < y(x_б)$.

Поскольку функция задана выражением $y(x) = a(x-p)^2 + q$, представим разность $y(x_б) - y(x_м)$ в виде:

$$y(x_б) - y(x_м) = \{(a(x_б - p)^2 + q)\} - \{(a(x_м - p)^2 + q)\} =$$
$$= a((x_б - p)^2 - (x_м - p)^2) = a(x_б - x_м)((x_б + x_м) - 2p).$$

Заметим, что по условию $x_м < x_б < p$ и $a < 0$. Отсюда знак всех сомножителей установлен: $a < 0$, $x_б - x_м > 0$ и $\left((x_б + x_м) - 2p\right) = (x_б - p) + (x_м - p) < 0$.

Следовательно, разность $y(x_б) - y(x_м) = a \cdot (x_б - x_м) \cdot ((x_б + x_м) - 2p) > 0$, то есть $y(x_б) > y(x_м)$. Участки графика левее и правее вершины называют ***ветвями параболы***, и говорят: при $a < 0$ «ветви параболы направлены вниз» (рис. 1.1),

при $a > 0$ «ветви параболы направлены вверх» (рис. 1.2);

что является, по сути, геометрической интерпретацией доказанных в этом разделе утверждений.

●●● Если абсциссы точек $x_Л$ и $x_П$ таковы, что $x_Л < p < x_П$ и выполняется $|x_Л - p| = |x_П - p|$, то $y(x_Л) = y(x_П)$.

Доказать это утверждение не составит труда, поскольку при возведении во вторую (чётную) степень равные по модулю величины, независимо от их знака, будут принимать равные значения и выполняется

$$y(x_Л) = a(x_Л - p)^2 + q = a(x_П - p)^2 + q = y(x_П).$$

Модуль разности чисел, в геометрическом смысле, соответствует расстоянию между числами на числовой прямой, поэтому можно переформулировать так: «Ординаты точек параболы, абсциссы которых равноудалены от числа p, совпадают». Другими словами: «Вертикальная прямая, заданная уравнением $x = p$ (проходящая через вершину параболы) является осью симметрии графика функции $\boldsymbol{y(x) = a(x-p)^2 + q}$».

Для графика функции, заданной выражением $y(x) = ax^2 + bx + c$, вертикальная прямая – ось симметрии параболы – будет задаваться уравнением $x = -\dfrac{b}{2a}$, поскольку функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ может быть представлена в виде $y(x) = a(x-p)^2 + q$, где $p = -\frac{b}{2a}$ и $q = c - \frac{b^2}{4a}$, и, напомним, вершина графика функции имеет координаты $(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a})$.

●●●● Очевидно, что функция $y(x) = a(x-p)^2 + q$ при $a > 0$ неограниченно растёт, и при $a < 0$ неограниченно убывает. Важно помнить, что предлагаемые рисунки являются лишь иллюстрацией части графика, поскольку ветви параболы, в зависимости от знака коэффициента a, бесконечно устремлены вверх или вниз.

Замечание 1: Обобщим. Значение коэффициента p определяет положение вершины параболы по горизонтали, значение коэффициента q по вертикали. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; от значения коэффициента a по абсолютной величине зависит насколько быстро будет возрастать (убывать) функция $y(x) = a(x-p)^2 + q$, другими словами, насколько круто будут устремлены вверх, или вниз, в зависимости от знака a, ветви параболы (рис. 1.1 и рис. 1.2). **Замечание 2:** Через ***три различные*** точки проходит ***единственная*** парабола. То есть, зная координаты трёх различных точек, через которые проходит график функции $y(x) = ax^2 + bx + c$, можно определить значения коэффициентов a, b *и* c, решив для этих переменных соответствующую систему уравнений.

2. Арифметический квадратный корень $\sqrt{\mathrm{A}}$

Арифметический квадратный корень из НЕотрицательного числа А обозначают символом $\sqrt{A}$ и определяют как НЕотрицательное число, квадрат которого равен А.

Так из определения следует, что $\sqrt{25} = 5$. Квадратный корень не всегда является целым или рациональным числом (напомним, рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m- целое и n- натуральное число). Так $\sqrt{7}$ не является рациональным числом (*иррациональное*). Однако, исходя из свойств степенной функции или опираясь на определение квадратного корня, можно оценить это число. Поскольку $4 < 7 < 9$, то для числа $\sqrt{7}$ выполняется $2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$.

Непосредственно из определения квадратного корня вытекают его свойства. Для **неотрицательных чисел** s *и* t выполняется:

$$\left(\sqrt{s}\right)^2 = s; \quad \sqrt{st} = \sqrt{s} \cdot \sqrt{t}; \quad \sqrt{\frac{s}{t}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}} \text{ где } t \neq 0; \quad \sqrt{t^{2n}} = t^n.$$

Кроме того, используя формулу сокращённого умножения или перемножая скобки непосредственно, легко доказать $\left(\sqrt{s} + \sqrt{t}\right)\left(\sqrt{s} - \sqrt{t}\right) = s - t$.
Выражения в скобках в левой части равенства называют *сопряжёнными* друг к другу.

Пример 3. Найти целое число, представленное в виде

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{7}{3-\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}.$$

Решение. *Способ 1.* Чтобы получить в знаменателе разность квадратов, помножим числитель и знаменатель каждой дроби на сопряжённое к знаменателю выражение, не равное нулю,

$$\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} + \frac{7\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)} - \frac{3\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{7\left(3+\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{3\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3} + \frac{7\left(3+\sqrt{2}\right)}{7} - \frac{3\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{3} =$$

$$= \sqrt{5}+\sqrt{2}+3+\sqrt{2}-\sqrt{8}-\sqrt{5} = 2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2} = 3.$$

Способ 2. Запишем первую дробь в виде:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}\,.$$

Аналогично преобразуем второе и третье слагаемые:

$$\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\frac{9-2}{3-\sqrt{2}}=\frac{3^2-(\sqrt{2})^2}{3-\sqrt{2}}=\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{3-\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{8-5}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{5})^2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\sqrt{8}+\sqrt{5}\,.$$

Отсюда $\sqrt{5}+\sqrt{2}+3+\sqrt{2}-\sqrt{8}-\sqrt{5}=2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=3$. **Ответ:** 3.

Пример 4. Докажите тождество $2\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=5$.

Решение. Для доказательства тождества рассмотрим разность правой и левой части равенства из условия и докажем, что она равна нулю.

Но прежде, рассматривая возможные варианты группировки слагаемых под знаком корня, сформируем в числовых выражениях $3+2\sqrt{2}$ и $17-12\sqrt{2}$ полные квадраты, воспользовавшись известными формулами

$$Z^2+2\cdot Z\cdot W+W^2=(Z+W)^2 \text{ или } Z^2-2\cdot Z\cdot W+W^2=(Z-W)^2.$$

Сумму $3+2\sqrt{2}$ представим в виде

$$3+2\sqrt{2}=1+2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+2=1+2\cdot 1\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2.$$

С учётом того что $(2\sqrt{2})^2=8$, для числового выражения $17-12\sqrt{2}$ получим

$$17-12\sqrt{2}=9-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+8=\ 3^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=(3-2\sqrt{2})^2.$$

Заметим, что $3-2\sqrt{2}>0$, так как $3^2=9>8=(2\sqrt{2})^2$, и, опираясь на определение квадратного корня, получим

$$2\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-5=2\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}-5=$$
$$=2\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(3-2\sqrt{2}\right)-5=5-5=0.$$

Замечание. Будьте внимательны к формулировкам заданий и определению квадратного корня. Если стоит задача «найдите $\sqrt{s^2}$» НЕ всегда число s может быть предложено в качестве ответа, поскольку по определению квадратный корень это **неотрицательное** число и $\sqrt{s^2}\geq 0$. Если же нам не известен знак переменной s, можно записать $\sqrt{s^2}=|s|$, используя понятие модуль, или рассмотреть два случая $\sqrt{s^2}=s$, если $s\geq 0$ и $\sqrt{s^2}=-s$, если $s<0$.

3. Решение квадратного уравнения.

Алгебраическое выражение, содержащее переменную и знак равенства, называется уравнением.

Корень уравнения – это значение переменной, при подстановке которого в уравнение равенство выполняется, то есть уравнение обращается в тождество.

Решить уравнение означает найти ВСЕ его корни или установить факт, что корней нет.

Иногда корень уравнения называют также решением этого уравнения.

Уравнения (системы уравнений) называются равносильными, если они имеют одно и то же множество корней, т.е. если каждый корень одного уравнения (системы уравнений) является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго уравнения (системы уравнений) является корнем первого уравнения (системы уравнений), или если оба уравнения (системы уравнений) не имеют корней.

4.1. Решение уравнения $\boldsymbol{x^2 = A}$.

Заметим, что корнями уравнения $x^2 = 9$ будут два числа $x_1 = 3$ *и* $x_2 = -3$, поскольку $(3)^2 = (-3)^2 = 9$.

Ещё раз обратим ваше внимание, что из двух чисел, квадрат которых равен 9, только **неотрицательное** число является, в силу определения этого понятия, арифметическим корнем из 9, а именно $\sqrt{9} = 3$. Отсюда следует, что корни нашего уравнения, используя введённое обозначение, могут быть записаны как $x_1 = 3 = \sqrt{9}$ и $x_2 = -3 = -\sqrt{9}$.

Заметим, что уравнение $x^2 = 9$ других корней не имеет, сравнивая результаты возведения во вторую степень чисел, отличных от найденных корней. Легко заметить, что, число 4 не является корнем предложенного в условии уравнения, поскольку $4^2 = 16 > 9 = 3^2$.

Какие корни имеет уравнение $x^2 = A$ в зависимости от значений числа A?

Для решения в общем виде уравнения $x^2 = A$ рассмотрим три случая:

1) $\boldsymbol{A} < 0$. В этом случае **корней** уравнения $x^2 = A$ **не существует**, поскольку ни одно число при возведении во вторую (чётную) степень не может принимать отрицательные значения.

2) $\boldsymbol{A = 0}$. В этом случае, очевидно, имеется **единственный корень** $x = 0$.

3) $\boldsymbol{A} > 0$. Тогда уравнение имеет **два различных корня** $x_1 = \sqrt{A}$ и $x_2 = -\sqrt{A}$. Исходя из определения арифметического квадратного корня, и, так как $(-1)^2 = 1$, имеем $(x_1)^2 = \left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ и $(x_2)^2 = \left(-\sqrt{A}\right)^2 = A$, Иногда пару корней квадратного уравнения $x^2 = A$ записывают в виде $x_{1,2} = \pm\sqrt{A}$.

Других корней уравнения $x^2 = A$ не существует. Строгое математическое доказательство утверждения, что уравнение $x^2 = A$ имеет не более двух корней, мы оставим за рамками нашего пособия, но идея доказательства обозначена выше для уравнения $x^2 = 9$.

4.2. Формулы корней квадратного уравнения $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$.

Уравнение $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$***, в одной части которого стоит число 0, а в другой квадратный трёхчлен (напомним*** $\boldsymbol{a \neq 0}$***), называется квадратным уравнением.***

Любое квадратное уравнение может быть приведено к ***равносильному уравнению*** с коэффициентом при $\boldsymbol{x^2}$ равным единице делением обеих частей равенства на НЕНУЛЕВОЙ коэффициент a.

Уравнение вида $\boldsymbol{x^2 + ux + v = 0}$ *(у которого коэффициент при x^2 равен единице)* ***называется приведённым квадратным уравнением.***

Для того чтобы решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, используем полученное ранее соотношение

$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$. Полученное уравнение можно представить в виде $a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c$. Разделим обе части равенства на коэффициент $a \neq 0$, получим

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Выражение $\boldsymbol{(b^2 - 4ac)}$***, составленное из коэффициентов квадратного уравнения*** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$***, называют дискриминантом квадратного уравнения и обозначают заглавной латинской буквой*** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$***.***

Используя введённое обозначение для дискриминанта, перепишем

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}.$$

Заметим, что знак правой части определяется знаком дискриминанта, так как знаменатель дроби всегда положителен. Опираясь на результаты раздела 4.1, рассмотрим три случая:

1) ***Если*** $\boldsymbol{D} < 0$, то ***корней не существует***, поскольку слева стоит квадрат суммы – неотрицательное выражение при любых значениях переменной.

2) ***Если*** $\boldsymbol{D = 0}$, то ***существует единственный корень*** $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ ***уравнения*** $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$. В этом случае имеет место ситуация «кратного корня».

3) ***Если*** $\boldsymbol{D} > 0$, записав уравнение $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$ в виде $4a^2(x + \frac{b}{2a})^2 = (2a\left(x + \frac{b}{2a}\right))^2 = D$, опираясь на результат раздела 4.1, получим

$$2a\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{D}.$$

В этом случае ***имеем два различных*** (так как $D > 0$) ***корня***
$x_{1,2} = \boldsymbol{\frac{\pm\sqrt{D}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$ ***уравнения*** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, которые можно переписать в виде

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Полученные выше выражения для x_1 и x_2 носят название «формулы корней квадратного уравнения».

Замечание 1: Обратите внимание, что поскольку рассмотренные выше случаи 1–3 исчерпывают все варианты значения дискриминанта, то верно утверждение: квадратное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

Замечание 2: Для нахождения корней квадратного уравнения в задачах удобнее использовать готовые формулы (что ускоряет решение), которые будет несложно запомнить, обращаясь к ним раз за разом. Но иногда, в качестве упражнения, для нахождения корней квадратного уравнения можно последовательно повторить шаги, ведущие к формулам, выделить полный квадрат, что займёт больше времени, но позволит закрепить полезный навык выделения «полного квадрата».

Пример 5. Решить квадратное уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

1 способ. Вычислим дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49.$$

Воспользуемся полученными формулами для корней квадратного уравнения

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{3+\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$;

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{3-\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$.

2 способ. В качестве повторения получим корни уравнения, используя технику непосредственного выделения квадрата двучлена.

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16}\right) - 2 \cdot \frac{9}{16} - 5 = 2(x - \tfrac{3}{4})^2 - \frac{49}{8} = 0,$$

Отсюда $(x - \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16}$, тогда $x - \frac{3}{4} = \pm\frac{7}{4}$ и получим

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ и } x_2 = \frac{3}{4} - \frac{7}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

4.3. Формулы Виета и разложение квадратного трехчлена на множители.

В предыдущем разделе для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ мы установили формулы корней $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Непосредственными вычислениями можно получить соотношения:

1) $x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$;

2) $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2-D^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Для корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

выражения $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ называются формулами Виета.

Заметим, что корни квадратного уравнения полностью определяются его коэффициентами, но существует сколь угодно много равносильных, с одним и тем же набором корней, квадратных уравнений.

Так, уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$ и уравнение $20x^2 - 30x - 50 = 0$ равносильны, т.е. обращаются в тождество при одних и тех же значениях переменной, так как $20x^2 - 30x - 50 = 10(2x^2 - 3x - 5)$.

Для корней x_1 и x_2 приведённого квадратного уравнения $x^2 + ux + v = 0$ формулы Виета примут вид $x_1 + x_2 = -u$ и $x_1 \cdot x_2 = v$.

Доказательство следует из общей формулировки, если положить

$$a = 1, b = u,\ c = v.$$

И для приведённого квадратного уравнения выполняется обратное:

Если числа x_1 и x_2 таковы, что

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -u; \\ x_1 \cdot x_2 = v, \end{cases}$ то x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + ux + v = 0$.

Пример 6. Квадратное уравнение $x^2 - 4x + 2h = 0$ имеет корни, для которых выполняется соотношение $x_2 = -3x_1$. Определите значение параметра h и найдите корни уравнения.

Согласно формулам Виета для корней x_1 и x_2 приведённого квадратного уравнения $x^2 + ux + v = 0$ выполняется $x_1 + x_2 = -u$ и $x_1 \cdot x_2 = v$.

Отсюда, для квадратного уравнения из условия задачи можно записать

$$x_1 + x_2 = x_1 + (-3x_1) = -2x_1 = 4,$$

откуда получаем значение $x_1 = -2$. И так как $x_2 = -3x_1$, получаем $x_2 = 6$.

Теперь, поскольку корни уравнения установлены $x_1 = -2$ и $x_2 = 6$, используя соотношение $x_1 \cdot x_2 = 2h = (-2) \cdot 6 = -12$, найдём значение параметра $h = -6$.

Для найденного значения параметра $h = -6$ уравнение примет вид

$$x^2 - 4x + 2(-6) = x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Убедимся, что для найденного значения параметра дискриминант уравнения неотрицателен и уравнение, данное в условии задачи, имеет корни. Вычислим

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 > 0.$$

Последние выкладки можно заменить непосредственной проверкой найденных корней $(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 12 = 6^2 - 4 \cdot 6 - 12 = 0$.

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 6$ и $h = -6$.

Если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то для любого значения переменной x выполняется равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Это легко проверить, раскрывая скобки в правой части равенства и используя формулы Виета

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= ax^2 + bx + c.$$

Так, используя найденные выше корни уравнения $2x^2 - 3x - 5 = 0$, для квадратного трёхчлена можно записать $2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1)(x - \frac{5}{2})$.

Разложение квадратного трёхчлена на множители полезно при решении неравенств, а также при преобразовании дробных выражений.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{2x^2-3x-5}{-4x^2+4x+15} \geq 0$.

Решение. Чтобы установить область допустимых значений переменной (ОДЗ), то есть те значения переменной, при которых математическое выражение определено (имеет смысл), и определить знаки числителя и знаменателя, полезно решить соответствующие квадратные уравнения.

Для числителя воспользуемся полученным выше выражением

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x+1)(x-\tfrac{5}{2}).$$

Знаменателю соответствует уравнение

$$-4x^2 + 4x + 15 = 0$$

с дискриминантом $D = 4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 15 = 16 + 240 = 256 = 16^2$.

Вычислив корни

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4+16}{-8} = -\frac{3}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-4-16}{-8} = \frac{5}{2},$$

преобразуем знаменатель $-4x^2 + 4x + 15 = -4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Неравенство из условия примет вид $\dfrac{2(x+1)(x-\frac{5}{2})}{-4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)} \geq 0$.

Заметим, чтобы знаменатель не обращался в ноль и алгебраическое выражение в условии задачи имело смысл, нужно потребовать

$$\begin{cases} x \neq -\dfrac{3}{2}, \\ x \neq \dfrac{5}{2}; \end{cases}$$

и для указанных значений числитель и знаменатель можно сократить на НЕнулевой множитель $2\left(x-\frac{5}{2}\right)$. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} x \neq -\dfrac{3}{2}, \\ x \neq \dfrac{5}{2}; \\ \dfrac{x+1}{-2(x+\frac{3}{2})} \geq 0. \end{cases}$$

Когда выражение $\dfrac{x+1}{-2(x+\frac{3}{2})}$ меняет знак? Поскольку выражение $(x+1)$, стоящее в числителе, меняет знак «при прохождении» аргумента через число (-1), а выражение $-2(x+\frac{3}{2})$, стоящее в знаменателе, имеет разный знак левее и правее числа $-\dfrac{3}{2}$, то имеет смысл рассмотреть следующие интервалы на числовой прямой:

Если $x < -\frac{3}{2}$, то $\begin{cases} x+1 < 0, \\ -2\left(x+\frac{3}{2}\right) > 0; \end{cases}$ и, следовательно, $\dfrac{x+1}{-2\left(x+\frac{3}{2}\right)} < 0$.

Если $-\frac{3}{2} < x < -1$, то $\begin{cases} x+1 < 0, \\ -2\left(x+\frac{3}{2}\right) < 0; \end{cases}$ и, следовательно, $\frac{x+1}{-2(x+\frac{3}{2})} > 0$.

Если $x = -1$, то $\begin{cases} x+1 = 0, \\ -2\left(x+\frac{3}{2}\right) < 0; \end{cases}$ и, следовательно, $\frac{x+1}{-2(x+\frac{3}{2})} = 0$.

Если $\begin{cases} x > -1, \\ x \neq \frac{5}{2}; \end{cases}$ то $\begin{cases} x+1 > 0, \\ -2\left(x+\frac{3}{2}\right) < 0; \end{cases}$ и, следовательно, $\frac{x+1}{-2(x+\frac{3}{2})} < 0$.

Так как рассмотрены все допустимые значения переменной x, получаем решения неравенства $-\frac{3}{2} < x \leq -1$, которые удовлетворяют требованию

$$\begin{cases} x \neq -\frac{3}{2}; \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Запишем ответ в виде числового промежутка. **Ответ:** $x \in (-\frac{3}{2}; -1]$.

5. Взаимосвязь расположения на координатной плоскости графика функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ с корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если x_* является корнем квадратного уравнения, т. е. $ax_*^2 + bx_* + c = 0$, то $y(x_*) = 0$. Другими словами, точка графика, с координатами $(x_*; y(x_*))$, является точкой пересечения графика функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ с осью абсцисс Ox. Кроме того, в силу установленной симметрии графика функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ относительно вертикальной прямой $x = -\frac{b}{2a}$ (проходящей через вершину параболы), а так же принимая во внимание, что график убывает или возрастает правее и левее вершины в зависимости от знака коэффициента a, можно сделать вывод, что квадратное уравнение не может иметь более двух корней.

Можно заметить, что поскольку $y(0) = c$, то график функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ пересекается осью ординат Oy в точке с координатами $(0; c)$.

Для решения задач, связанных с квадратным трёхчленом, полезно изображать эскиз графика функции $y(x) = ax^2 + bx + c$ с учётом направления ветвей, которые, напомним, направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$, отмечая положения вершины с координатами $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$,

а так же обозначая на рисунке точки пересечения графика с осью абсцисс Ox, имея в виду, что если точки пересечения графика осью абсцисс Ox существуют, абсциссы этих точек являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Перечислим основные моменты, указывающие на взаимосвязь корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и расположения графика

$y(x) = ax^2 + bx + c$ на числовой плоскости.

1) Если $D > 0$, абсцисса вершины параболы

$x_{верш} = -\frac{b}{2a}$ является серединой отрезка, задаваемого корнями уравнения.

$$x_{верш} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = -\frac{b}{2a}.$$

В точках, соответствующих корням уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ меняет знак (рис. 3.1).

2) При $D = 0$ вершина параболы лежит на оси абсцисс и $x_{верш}$ совпадает с единственным корнем уравнения $x_{верш} = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

При этом, при $a > 0$ выполняется $y(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ и при $a < 0$ верно $y(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$ (рис. 3.2).

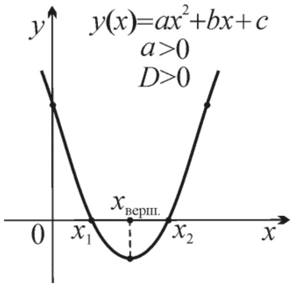

Рис. 3.1

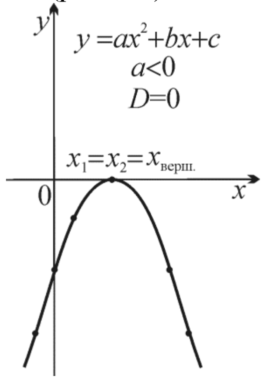

Рис. 3.2

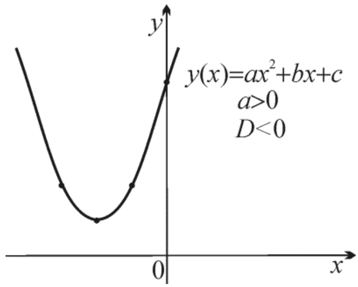

Рис. 3.3

3) Точек пересечения графика с осью абсцисс нет, если $D < 0$. Важно заметить, что в этом случае функция $y(x) = ax^2 + bx + c$ не меняет знак, что в геометрических терминах означает что её график не пересекает ось абсцисс.

Выполняются строгие неравенства

$y(x) = ax^2 + bx + c > 0$ при $a > 0$ (рис. 3.3) и

$y(x) = ax^2 + bx + c < 0$ при $a < 0$.

Пример 8. Определить значения параметра c, при которых корни уравнения $2x^2 + 8x + c = 0$ отрицательны.

Решение.

1 способ. Корни квадратного уравнения существуют тогда и только тогда, когда неотрицателен дискриминант $D = (8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 8(8 - c) \geq 0$.

На основании формул Виета для корней квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{8}{2} = -4 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{2}.$$

При выполнении условия $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{2} > 0$ оба корня имеют одинаковый знак и, так как при любом значении параметра известно, что $x_1 + x_2 = -\frac{8}{2} = -4$, корни могут быть только отрицательными, если и только если выполняется

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4; \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{2} > 0, \\ 8(8-c) \ge 0, \end{cases}$$

откуда следует, что значения параметра $c \in (0; 8]$ являются ответом задачи.

2 способ. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2 + 8x + c$, и её график, как показано на рис. 4. Требование отрицательности корней может быть формализовано в виде системы неравенств.

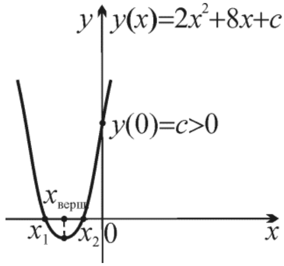

Рис. 4

Проверьте, в качестве упражнения, что из условия задачи следуют условия, записанные в системе и, наоборот, из условий системы вытекает, что оба корня отрицательны.

$$\begin{cases} D \ge 0 \left\{\begin{matrix} \text{существование корней} - \text{точек} \\ \text{пересечения графика с осью абсцис} \end{matrix}\right\}; \\ y(0) > 0 \left\{\begin{matrix} \text{корни находятся по одну сторону от оси ординат,} \\ \text{то есть имеют одинаковый знак} \end{matrix}\right\}; \\ x_{\text{верш}} < 0 \,\{\text{оба корня находятся именно левее нуля}\}. \end{cases}$$

Запишем систему для данных из условия задачи

$$\begin{cases} D = (8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c \ge 0; \\ y(0) = c > 0; \\ x_{верш} = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2 < 0; \end{cases},$$

которая равносильна системе $\begin{cases} c \le 8, \\ c > 0; \end{cases}$ т. е. $c \in (0; 8]$.

3 способ. Выпишем, систему неравенств, используя формулы корней квадратного уравнения:

$$\begin{cases} D = (8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c \ge 0; \\ x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot c}}{2 \cdot 2} < 0; \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot c}}{2 \cdot 2} < 0. \end{cases}$$

Напомним, что по определению, только при $c \le 8$ квадратный корень будет иметь смысл, и неравенство, записанное в системе последним, выполняется для параметра $c \le 8$. Получаем равносильную систему

$$\begin{cases} c \le 8; \\ -8 + \sqrt{(8)^2 - 8 \cdot c} < 0. \end{cases}$$

Второе неравенство системы перепишем в виде $\sqrt{8^2 - 8 \cdot c} < 8$, и на основании определения квадратного корня, приходим к неравенству $0 \le 8^2 - 8 \cdot c < 8^2$. Отсюда, $\begin{cases} c \le 8, \\ c > 0; \end{cases}$ т. е. $c \in (0; 8]$.

В данном примере решение системы иррациональных неравенств, порождаемых формулами для корней квадратного уравнения, не составило большого труда. Однако зачастую решение таких неравенств, а тем более системы иррациональных неравенств, требует большой аккуратности в рассуждениях, и внимательности к определению понятия арифметический корень, с которым вы познакомились в этом пособии. Непростая задача даже для выпускников. Мы привели три разных способа решения этого примера для того, чтобы познакомить вас с различными подходами, которыми вы можете воспользоваться при решении задач. **Ответ**: $c \in (0; 8]$.

Пример 9. Задумано натуральное число. Если возвести его в четвёртую степень и вычесть из результата помноженный на 5 квадрат следующего за ним числа, а затем прибавить к полученной разности увеличенное в 10 раз исходное число, то в результате получится 31. Определить задуманное число.

Решение. Обозначим задуманное число переменной l. Тогда условие задачи может быть записано в виде уравнения $l^4 - 5(l+1)^2 + 10l = 31$. Раскроем скобки и преобразуем уравнение, получим $l^4 - 5l^2 - 36 = 0$. Полученное ***уравнение имеет четвёртую старшую степень переменной, и при этом содержит только чётные степени переменной – такое уравнение носит название биквадратное уравнение***.

Для решения биквадратного уравнения, положим $s = l^2 \geq 0$, и относительно введённой переменной s получим квадратное уравнение $s^2 - 5s - 36 = 0$.

Найдём корни уравнения

$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25+4\cdot1\cdot36}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{169}}{2} = \frac{5\pm13}{2}$. То есть $s_1 = 9$ и $s_2 = -4$.

Из соотношения $s = l^2$ для $s_1 = 9$ получаем $l = \pm3$, но по условию задачи мы ищем **натуральное** число, поэтому значение $l = -3$ отбрасываем. Решение $l = 3$. Для корня $s_2 = -4$ не выполняется условие $s \geq 0$ и не существует значения переменной l, такой что $l^2 = -4$. **Ответ**: 3.

Замечание. Ввод вспомогательной переменной является распространённым приёмом для решения задач. Заменяя алгебраическое выражение новой переменной, зачастую удаётся более сложную задачу свести к последовательному, пошаговому решению нескольких, более стандартных, понятных в изложении подзадач. При этом, для того, чтобы исходная задача была решена, необходимо вернуться к исходным переменным.

Пример 10. Две бригады вырыли котлован за 12 дней. Как долго пришлось бы работать каждой бригаде в отдельности, чтобы вырыть такой же котлован, если при самостоятельной работе первая бригада выполнит эту работу на 10 дней быстрее, чем вторая?

Решение. Пусть n дней потребуется первой бригаде, чтобы вырыть котлован, тогда, согласно условию, второй бригаде для выполнения этой работы потребуется $(n+10)$ дней. Величина $\frac{1}{n}$ определяет долю котлована, которую выроет первая бригада за один день. Вторая бригада выроет за один день $\frac{1}{n+10}$ часть котлована. Отсюда следует, что обе бригады за один день выполнят $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+10}=\frac{n+n+10}{n(n+10)}=\frac{2n+10}{n(n+10)}$ часть работы, и, следовательно, для совместного рытья котлована обеим бригадам потребуется срок, задаваемый обратной величиной (действительно если, к примеру, вы за один день выполнили пятую часть задания, то на выполнение всего задания с той же производительностью потребуется пять дней).

Получаем, используя данные условия задачи, уравнение $\frac{n(n+10)}{2n+10}=12.$

Поскольку из условия задачи можно заключить, что $2n+10\neq 0$, перейдём к равносильному уравнению $n(n+10)=12(2n+10)$.

Раскрывая скобки, получим квадратное уравнение $n^2-14n-120=0$ с дискриминантом

$$D=(-14)^2+4\cdot 120=2^2\cdot 7^2+4\cdot 120=2^2(49+120)=2^2\cdot 13^2.$$

Получаем $n_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{14+2\cdot 13}{2}=20$ и $n_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{14-2\cdot 13}{2}<0.$
Так как переменной n обозначено количество дней, то отрицательный корень n_2 мы отбрасываем. Имеем $n=20$. То есть первой бригаде потребуется 20 дней, чтобы вырыть котлован. Из условия, второй бригаде потребуется $n+10=30$ дней.

Ответ: 20 и 30 дней потребуется первой и второй бригадам соответственно.

Пример 11. Решить неравенство $-3x^2+24|x|+27>0$.

Решение. Заметим, что в силу чётности показателя степени для любого значения переменной верно $|x|^2=x^2$ и исходное неравенство можно записать в виде $-3|x|^2+24|x|+27>0$.

Если ввести вспомогательную переменную $t=|x|\geq 0$, неравенство примет вид $-3t^2+24t+27>0$.

Рассмотрим квадратное уравнение $-3t^2+24t+27=0$, разделим на -3 и для равносильного уравнения $t^2-8t-9=0$ найдём корни $t_1=9$ и $t_2=-1$. Используя найденные корни, перепишем неравенство

$$-3t^2+24t+27=-3(t+1)(t-9)>0,$$

что равносильно неравенству $(t+1)(t-9)<0$. Заметим, что скобки имеют разные знаки, только если $-1<t<9$ (при значениях переменной t левее числа -1 или правее числа 9 обе скобки имеют одинаковый знак и их произведение положительно).

Тот же результат можно получить, анализируя положение параболы, графика функции $y(t)=-3t^2+24t+27=-3(t+1)(t-9)$, ветви которой направлены вниз и пересекают ось Ox в точках с абсциссами $t_2=-1$ и $t_1=9$, чтобы определить значения аргумента, при которых $y(t)>0$, как показано на рис. 5. При переходе к исходной переменной требуется аккуратность.

Система $\begin{cases} -1 < t < 9, \\ t \geq 0; \end{cases}$ равносильна двойному неравенству $0 \leq t < 9$. Получаем для исходной переменной выражение $0 \leq |x| < 9$, откуда получаем решение исходного неравенства $-9 < x < 9$. **Ответ**: $-9 < x < 9$.

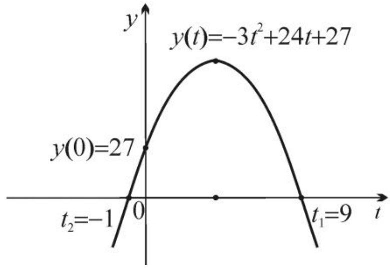

Рис. 5

Замечание. Обратим ваше внимание, что рис. 5 является эскизом графика функции, поскольку мы пренебрегли масштабом, изображая пересечение параболы с осью ординат Oy. Это сделано для того, чтобы рисунок, на котором мы отмечаем необходимые нам моменты расположения параболы на числовой плоскости с учётом найденных корней соответствующего квадратного уравнения, был компактным и наглядным.

Пример 12. Сумма цифр двузначного числа равна 6, а сумма квадратов цифр равна 26. Определите заданное двузначное число.

Решение. Пусть число Z имеет запись $Z = \overline{yx} = 10y + x$, где y и x цифры, стоящие в разрядах десятков и единиц соответственно, и $y \neq 0$. Тогда условие задачи может быть записано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$$

Чтобы решить её, выразим переменную y через переменную x из первого уравнения, получим равносильную систему

$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ x^2 + (6 - x)^2 = 26; \end{cases} \text{ и далее } \begin{cases} y = 6 - x, \\ 2(x^2 - 6x + 5) = 0. \end{cases}$$

Можно заметить, что для пары целых чисел $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$ выполняются формулы Виета $1 \cdot 5 = 5$ и $1 + 5 = -(-6)$ для приведённого квадратного уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$. Такого рода рассуждения, когда формулы Виета помогают «увидеть» целые корни, при условии проведения проверки найденных значений, можно рассматривать как вспомогательный способ нахождения корней приведённого уравнения.

Вычисляя значение переменной y из соотношения $y = 6 - x$, получим для $x_1 = 1$ значение $y_1 = 6 - x_1 = 5$ и для $x_2 = 5$ получим $y_2 = 6 - 5 = 1$. Мы установили два возможных варианта для числа Z, заданного в условии $Z = 15$ или $Z = 51$. **Ответ**: 15 или 51.

Замечание. Обратим ваше внимание: если в системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$$

поменять местами переменные x и y, то уравнения, входящие в систему, и, следовательно, система в целом, не изменятся. Такие системы (уравнения) называют симметрическими, и если пара чисел $(a; b)$ является решением симметрической системы (уравнения), то решением будет и пара чисел $(b; a)$.

Пример 13. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 2x + 5} \cdot \sqrt{4 - x^2 + 2x} = 2\sqrt{2}$,

Решение. Заметим, что соотношение коэффициентов при переменной x позволяет нам использовать новую переменную $t = x^2 - 2x$, чтобы переписать исходное уравнение в более простом виде. Получим

$$\begin{cases} \sqrt{t+5} \cdot \sqrt{4-t} = 2\sqrt{2}, \\ t = x^2 - 2x. \end{cases}$$

Опираясь на определение и свойства арифметического квадратного корня, можно получить систему для новой переменной t.

$$\begin{cases} (t+5)(4-t) = 8, \\ t+5 \geq 0, \\ 4-t \geq 0; \end{cases}$$, которую можно переписать в виде

$$\begin{cases} (t+5)(4-t) = 8, \\ -5 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Равносильность систем обеспечивают внесённые в систему дополнительные условия неотрицательности выражений, из которых извлекаются корни. На следующем шаге решим квадратное уравнение относительно переменной t. Раскрывая скобки, получим $(t+5)(4-t) = -t^2 - t + 20 = 8$ или $-t^2 - t + 12 = 0$. Найдём $D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$ и корни $t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{-2}$, где $t_1 = 3$ и $t_2 = -4$. Заметим, что оба корня удовлетворяют двойному неравенству – и при найденных значениях переменной выражение $\sqrt{t+5} \cdot \sqrt{4-t} = 2\sqrt{2}$ имеет смысл.

Теперь необходимо вернуться к исходной переменной x, связанной с переменной t соотношением $t = x^2 - 2x$.

Для $t_1 = 3$ получаем уравнение $3 = x^2 - 2x$, которое можно переписать в виде $x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x-1)^2 - 4 = 0$, откуда получаем уравнение $(x-1)^2 = 4$, и, поскольку $x - 1 = \pm 2$, находим $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$.

Для $t_2 = -4$ получим уравнение $-4 = x^2 - 2x$ или

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x-1)^2 + 3 = 0.$$

Выделив полный квадрат, заметим, что значений переменой x, удовлетворяющих равенству, не существует (дискриминант последнего квадратного уравнения отрицателен, убедитесь самостоятельно).

Ответ: $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$.

Замечание. В общем случае, возведение во вторую (чётную) степень частей уравнения, стоящих правее и левее знака равенства, не является тождественным преобразованием уравнения и может привести к уравнению с дополнительными корнями, если не учитывать знаки выражений, которые возводились в чётную степень. Из равенства $x = 7$ следует выполнение равенства $x^2 = 7^2$, но уравнения не являются равносильными. Уравнение $x^2 = 49$ имеет два корня $x_{1,2} = \pm 7$, в отличие от исходного уравнения $x = 7$.

Разработка задания: О.В. Рязановская

Подписано к печати 24.06.2021 Формат 60х84/16
Уч. изд.л. 1,25 Тираж 100 экз.